Correction de l'examen sur les groupes de février 1982 (A.10)

1. Pour prouver que $(X.Y)^{-1} = Y^{-1}.X^{-1}$ quelles que soient X et Y les parties de G, on prouve deux inclusions.
   $\left((X.Y)^{-1} \subseteq Y^{-1}.X^{-1}\right)$

   $$\begin{aligned} \text{Soit } u \in (X.Y)^{-1} \text{ alors } & u = v^{-1} \text{ avec } v \in X.Y \text{ et } v = x.y \text{ avec } x \in X \text{ et } y \in Y \\ & \text{donc } u = v^{-1} = (x.y)^{-1} = y^{-1}.x^{-1} \text{ avec } x^{-1} \in X^{-1} \text{ et } y^{-1} \in Y^{-1} \\ & \text{donc } u \in Y^{-1}.X^{-1} \end{aligned}$$

   $\left(Y^{-1}.X^{-1} \subseteq (X.Y)^{-1}\right)$

   $$\begin{aligned} \text{Soit } u \in Y^{-1}.X^{-1} \text{ alors } & u = y^{-1}.x^{-1} \text{ avec } x \in X \text{ et } y \in Y \\ & \text{donc } u = (x.y)^{-1} \text{ avec } x \in X \text{ et } y \in Y \\ & \text{donc } u \in (X.Y)^{-1} \end{aligned}$$

2. On va prouver les deux implications : X partie non vide de G est un sous-groupe de G si et seulement si $X.X^{-1} = X$.
   $(\Rightarrow)$ Soit X un sous-groupe de G, on doit prouver que $X.X^{-1} = X$. On va prouver deux inclusions :

   $\left(X.X^{-1} \subseteq X\right)$ Soit $u \in X.X^{-1}$, donc $u = x_1.x_2^{-1}$ avec $x_1,\ x_2 \in X$.
   Comme X est un sous-groupe de G, $x_2^{-1} \in X$ et donc aussi $x_1.x_2^{-1} = u \in X$.

   $\left(X \subseteq X.X^{-1}\right)$ Soit $u \in X$, on peut écrire $u = u.1^{-1}$ et comme $u,\ 1 \in X$, on a $u \in X.X^{-1}$

   $(\Leftarrow)$ On a que $X.X^{-1} = X$, on doit montrer que X est un sous-groupe de G. On sait que X est non vide, par hypothèse. Etant donné $x, y \in X$, $x.y^{-1} \in X.X^{-1} = X$, donc par le critère du sous-groupe, X est bien un sous-groupe de G.

3. Remarquons d'abord que $H_1.H_2 \neq \emptyset$ puisque $1 \in H_1$ et $1 \in H_2$, donc $1.1 = 1 \in H_1.H_2$. Pour prouver que $H_1.H_2$ est un groupe on va utiliser le résultat obtenu à la question 3, qui nous dit que X est un sous-groupe de G si et seulement si $X = X.X^{-1}$, en posant $X = H_1.H_2$.

   $$\begin{aligned} (H_1.H_2).(H_1.H_2)^{-1} &= H_1.H_2.H_2^{-1}.H_1^{-1} && \text{par la question 1} \\ &= H_1.H_2.H_1^{-1} && \text{car par hypothèse } H_2 \text{ est un sous-groupe de } G \\ &= H_2.H_1.H_1^{-1} && \text{car par hypothèse } H_1.H_2 = H_2.H_1 \\ &= H_2.H_1 && \text{car par hypothèse } H_1 \text{ est un sous-groupe de } G \\ &= H_1.H_2 && \text{car par hypothèse } H_1.H_2 = H_2.H_1 \end{aligned}$$

   On a donc que $X = H_1.H_2$ est un sous-groupe de G.

4. On doit montrer que si H_1 et H_2 sont des sous-groupe normaux de G, alors $H_1.H_2$ est un sous-groupe normal de G. Pour cela, il faut montrer deux choses :

   - $H_1.H_2$ est un sous-groupe de G :
     Pour cela on peut utiliser le résultat de la question 2, vu que H_1 et H_2 sont des sous-groupes normaux de G, par le même argument que dans la question précédente, on a que $H_1.H_2$ est non vide. Reste à prouver que $H_1.H_2 = H_2.H_1$. On va prouver les deux inclusions :
     – $H_1.H_2 \subseteq H_2.H_1$
       Soit $u \in H_1.H_2$, on a donc $u = h_1.h_2$ avec $h_1 \in H_1$ et $h_2 \in H_2$. Par conséquent $u \in h_1.H_2 = H_2.h_1$ (car H_2 est un sous-groupe normal de G et vu que $H_2.h_1 \subseteq H_2.H_1$, on a bien que $u \in H_2.H_1$
     – $H_2.H_1 \subseteq H_1.H_2$
       Cette deuxième inclusion se prouve exactement de la même manière que la première.

- $H_1.H_2$ est normal dans G :
  On va utiliser la définition de sous-groupe normal, on doit prouver que pour tout $g \in G$, $g.(H_1.H_2) = (H_1.H_2).g$.

$$\begin{aligned} g(H_1.H_2) &= H_1.g.H_2 && \text{car par hypothèse } H_1 \text{ est un sous-groupe normal de } G \\ &= (H_1.H_2).g && \text{car par hypothèse } H_2 \text{ est un sous-groupe normal de } G \end{aligned}$$

5. H_1 et H_2 sont des sous-groupes normaux de G tels que $H_1 \cap H_2 = \{1\}$.

   (a) On doit prouver que pour tout $h_1 \in H_1$ et $h_2 \in H_2$, $h_1.h_2 = h_2.h_1$. Etant donné $h_1 \in H_1$ et $h_2 \in H_2$, calculons l'élément $h_1.h_2.(h_2.h_1)^{-1} = h_1.h_2.h_1^{-1}.h_2^{-1}$, on constate que :

$$\underbrace{h_1.h_2.h_1^{-1}}_{\in H_2 \text{ car } H_2 \lhd G} \quad . \quad \underbrace{h_2^{-1}}_{\in H_2} \qquad \in H_2 \tag{1}$$

$$\underbrace{h_1}_{\in H_1} \quad . \quad \underbrace{h_2.h_1^{-1}.h_2^{-1}}_{\in H_1 \text{ car } H_1 \lhd G} \qquad \in H_1 \tag{2}$$

   Grâce aux équations (1) et (2), on a que quels que soient $h_1 \in H_1$ et $h_2 \in H_2$, $h_1.h_2.h_1^{-1}.h_2^{-1} \in H_1 \cap H_2 = \{1\}$ (par hypothèse).
   Par conséquent quels que soient $h_1 \in H_1$ et $h_2 \in H_2$, on a que $h_1.h_2.h_1^{-1}.h_2^{-1} = 1 \Leftrightarrow h_1.h_2 = h_2.h_1$

   (b) Il faut montrer qu'il existe un isomorphisme entre $H_1 \times H_2$ et $H_1.H_2$. Un candidat naturel pour cet isomorphisme est l'application $\sigma : H_1 \times H_2 \to H_1.H_2$ tel que $\sigma((h_1,h_2)) = h_1.h_2$. Montrons que σ est bien un morphisme, etant donnés $h_1,\ h_1' \in H_1$ et $h_2,\ h_2' \in H_2$:

$$\begin{aligned} \sigma\left((h_1,h_2).(h_1',h_2')\right) &= \sigma\left((h_1.h_1',h_2,h_2')\right) && \text{par définition du produit dans } H_1 \times H_2 \\ &= h_1.h_1'.h_2,h_2' && \text{par définition de } \sigma \\ &= h_1.h_2.h_1',h_2' && \text{car les éléments de } H_1 \text{ et } H_2 \text{ commutent par le point précédent} \\ &= \sigma((h_1,h_2)).\sigma\left((h_1',h_2')\right) && \text{par définition de } \sigma \end{aligned}$$

   On vient donc de montrer que σ est bien un morphisme, de par sa définition, σ est clairement surjectif. Il reste donc à prouver que que σ est injectif. Pour ce faire, on calcule le noyau de σ :

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}(\sigma) &= \{(h_1,h_2) \in H_1 \times H_2 : \sigma((h_1,h_2)) = 1\} && \text{par définition de } \mathrm{Ker}(\sigma) \\ &= \{(h_1,h_2) \in H_1 \times H_2 : h_1.h_2 = 1\} && \text{par définition de } \sigma \\ &= \left\{(h_1,h_2) \in H_1 \times H_2 : h_1 = h_2^{-1}\right\} && \text{on a donc que } h_1,\ h_2^{-1} \in H_1 \cap H_2 = \{1\} \\ &= \{(1,1)\} \end{aligned}$$

Ce qui prouve que σ est injectif et est donc un isomorphisme.