Examen d'algèbre - Partie groupes
Septembre 2005

Justifier toutes vos réponses. La qualité de la rédaction de vos arguments sera notée.

1. Soit $\langle A, \cdot_A, 1_A\rangle$ et $\langle B, \cdot_B, 1_B\rangle$ deux groupes. On sait que $A \times B$ muni des opérations composante par composante induite par celles de A et B est un groupe (appelé le produit direct de A et de B). Prouver que si $H \triangleleft A$ et $G \triangleleft B$ alors $H \times G \triangleleft A \times B$.

2. Soit $\sigma : A \times B \to C$ un épimorphisme de groupes. Prouver que si $ker(\sigma)$ est de la forme $H \times G$ avec $H < A$ et $G < B$ alors C est isomorphe à un produit direct de deux groupes. Que déduisez-vous dans le cas particulier où $ker(\sigma) = \{(1_A, 1_B)\}$?

3. Soit $n \in \mathbb{N}$, soit p_1, $p_2 \in \mathbb{N}$ deux nombres premiers distincts verifiant $n = p_1p_2$. Soit l'application τ définie comme suit:

$$\tau(a, b) = (ap_2 + bp_1) \mod n$$

   avec $a \in \mathbb{Z}/p_1\mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}/p_2\mathbb{Z}$.

   (a) Prouver que τ est un morphisme de $\langle \mathbb{Z}/p_1\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p_2\mathbb{Z}, +\rangle$ dans $\langle \mathbb{Z}_n, +\rangle$.

   (b) Prouver que $ker(\tau)$ est réduit à un singleton.

   (c) Montrer que $\langle \mathbb{Z}_n, +\rangle$ est isomorphe au produit direct $\langle \mathbb{Z}/p_1\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p_2\mathbb{Z}, +\rangle$.

4. Pour $n \in \mathbb{N}$ ($n \geq 1$) on definit l'ensemble G_n comme suit

$$G_n = \Big\{p \in S_n \mid \forall i \in \{1, ..., n\} \ \big(i = 2 \mod 5\big) \Rightarrow \big(p(i) = i\big)\Big\}$$

   (a) Prouver que $G_n < S_n$.

   (b) Décrire explicitement G_2, G_3 et G_4. A quel groupe connu G_4 est-il isomorphe?

   (c) G_2 est-il un sous-groupe normal de S_2?

   (d) Pour $n \geq 3$, G_n est-il un sous-groupe normal de S_n?

   (e) Donner l'ordre de G_{20}.