Examen d'algèbre - Partie polynômes
AOUT 2005

Justifier toutes vos réponses. La qualité de la rédaction de vos arguments sera notée.

1. (a) Décomposer le polynôme $X^3 + 2$ en facteurs irréductibles dans $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$.

   (b) Décomposer le polynôme $3X^4 + 7X^2 + 14X + 21$ en facteurs irréductibles dans $\mathbb{Q}[X]$ et $\mathbb{F}_7[X]$.

2. Soit I l'idéal de $\mathbb{Q}[X]$ engendré par $X^3 + 2$, c'est à dire

$$I = \langle X^3 + 2 \rangle = \{ f \cdot (X^3 + 2) \mid f \in \mathbb{Q}[X] \}.$$

   L'anneau $\mathbb{Q}[X]/I$ a-t-il des diviseurs de 0? Si oui donner un exemple, si non justifier.

3. Soit I_1 et I_2 deux idéaux de $\mathbb{Z}[X]$, on definit la somme de deux idéaux comme suit:

$$I_1 + I_2 = \{ a_1 + a_2 \mid a_1 \in I_1 \text{ et } a_2 \in I_2 \}.$$

   (a) Etant donnés I_1 et I_2 deux idéaux de $\mathbb{Z}[X]$, prouver que $I_1 + I_2$ est un idéal de $\mathbb{Z}[X]$ qui contient I_1.

   (b) Décrire l'idéal J de $\mathbb{Z}[X]$ donné par $J = \langle X \rangle + \langle 2 \rangle$.
   En déduire que l'idéal $\langle X \rangle$ n'est pas maximal dans $\mathbb{Z}[X]$.