Logique mathématique
AVRIL 2002

Justifiez toutes vos réponses. La qualité de la rédaction de vos arguments sera notée.

1. (a) Ecrire la forme générale d'un terme du langage $\{\leq\}$ où $\leq$ est un symbole de relation binaire.

   (b) La même question qu'en (1.a) pour le langage $\{S, \leq\}$ où S est un symbole de fonction unaire et $\leq$ un symbole de relation binaire.

2. Soit $\mathcal{L} = \{S, \leq\}$, le langage de la question (1.b). Considérons les structures $\langle \mathbb{N}, S, \leq \rangle$ et $\langle \mathbb{Z}, S, \leq \rangle$ où $S(x) = x + 1$ et $\leq$ est l'ordre usuel.

   (a) Décrivez toutes les sous-structures de $\langle \mathbb{N}, S, \leq \rangle$.

   (b) $\langle \mathbb{N}, S, \leq \rangle$ est-elle une sous-structure de $\langle \mathbb{Z}, S, \leq \rangle$? Justifiez.

   (c) $\langle \mathbb{N}, S, \leq \rangle$ et $\langle \mathbb{Z}, S, \leq \rangle$ sont-elles élémentairement équivalentes? Justifiez, en particulier donnez la définition d'équivalence élémentaire.

3. (a) Prouver que la relation suivante est diophantienne.

   $$\{(x_1, x_2) | x_1 \in \mathbb{N},\ x_2 \in \mathbb{N} \text{ et } x_2 \text{ est le reste de la division par 3 de } x_1\}$$

   (b) Même question pour la relation $\leq$ sur $\mathbb{N}$ et pour le graphe de la fonction S définie à la question (2).

   (c) Prouver que la relation $\neg(x_1 = x_2)$ sur $\mathbb{N}$ est diophantienne.

4. (a) Donner la définition d'un espace (au sens de la théorie des fonctions récursives).

   (b) Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une relation diophantienne $R \subseteq \mathbb{N}^2$ soit un espace.

5. Soit $I = \{1, 2, 3\}$. Donnez explicitement tous les ultrafiltres sur I. Justifiez.

6. Soit $E = \{i \in \mathbb{N} \mid i \geq 42\}$

   (a) Existe-t-il un ultrafiltre non principal $\mathcal{U}$ sur $\mathbb{N}$ tel que E est un élément de $\mathcal{U}$?

   (b) Quels sont les ultrafiltres principaux sur $\mathbb{N}$ qui ont E comme élément? Justifiez.

   (c) Existe-t-il un ultrafiltre $\mathcal{U}$ sur $\mathbb{N}$ vérifiant $3 \in \mathcal{U}$? Justifiez.

7. Soit $\mathcal{L} = \{+, \cdot, 0, 1\}$ le langage usuel des anneaux. Soit $\left(\mathcal{A}_i\right)_{i\in\mathbb{N}}$ une famille de $\mathcal{L}$-structures où chaque $\mathcal{A}_i$ est soit $\langle \mathbb{F}_2, +, \cdot, 0, 1\rangle$ ou soit $\langle \mathbb{F}_3, +, \cdot, 0, 1\rangle$. Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre non principal sur $\mathbb{N}$.

   (a) Prouver que $\prod_{i\in\mathbb{N}}^{\mathcal{U}} \mathcal{A}_i$ est un corps.

   (b) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\prod_{i\in\mathbb{N}}^{\mathcal{U}} \mathcal{A}_i$ soit de caractéristique 2. Justifier.

   (c) Prouver que quel que soit $\mathcal{U}$, on a soit $\prod_{i\in\mathbb{N}}^{\mathcal{U}} \mathcal{A}_i \equiv \langle \mathbb{F}_2, +, \cdot, 0, 1\rangle$, soit $\prod_{i\in\mathbb{N}}^{\mathcal{U}} \mathcal{A}_i \equiv \langle \mathbb{F}_3, +, \cdot, 0, 1\rangle$

8. (a) Calculer $2^{\aleph_0}.2^{2^{\aleph_0}}$.

   (b) Soit X un ensemble infini, prouver que 2^X a même cardinal que $2^{X\times X}$.

   (c) De (8.b) déduire que X^X a même cardinal que 2^X.