Logique mathématique
MAI 2003

Justifier toutes vos réponses. La qualité de la rédaction de vos arguments sera notée.

1. Soit $\mathcal{L}$ le langage R, c où R est un symbole de relation ternaire et c est un symbole de constante.

   (a) Décrire la forme générale des $\mathcal{L}$-termes.

   (b) Décrire la forme générale des $\mathcal{L}$-formules atomiques.

   (c) Soit $\mathcal{M} = \langle A, f, a \rangle$ une structure où f est une fonction binaire à valeur dans A et $a \in A$. Montrer que cette structure s'interprète naturellement comme une $\mathcal{L}$-structure (décrire explicitement $R^{\mathcal{M}}$ et $c^{\mathcal{M}}$).

   (d) Avec les notations des points précédents, écrire les $\underline{\mathcal{M}\text{-énoncés}}$ satisfaits par $\mathcal{M}$ qui exprime que f est une fonction <u>définie partout</u>, c'est à dire $dom f = A^2$ et que f est une fonction (et pas seulement vue comme une relation ternaire).

   (e) Soit $\langle G, \cdot, 1 \rangle$ un groupe, on considère $R^G = \{(x, y, z) \mid x \cdot y = z\}$ et $c^G = 1$. De cette façon $\mathcal{G} = \langle G, R^G, c^G \rangle$ est une $\mathcal{L}$-structure. Donner une $\mathcal{L}$-axiomatisation (c'est à dire une liste de $\mathcal{L}$-énoncés) du fait que $\mathcal{G}$ est un groupe.

   (f) Une $\mathcal{L}$-sous-structure de $\mathcal{G}$ est-elle un sous groupe de $\langle G, \cdot, 1 \rangle$? Justifier votre réponse.

2. (a) Soit $\mathcal{L}$ un langage qui admet une $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{F} = \langle F, ... \rangle$ où $|F| = 3$. Prouver que toute $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{M}$, qui est élémentairement équivalente à $\mathcal{F}$ (notation $\mathcal{F} \equiv \mathcal{M}$) a un domaine de cardinal 3.

   (b) Soit $\prod_{i \in I}^{\mathcal{U}} \mathcal{A}_i$ un ultraproduit quelconque de $\mathcal{L}$-structures où tous les domaines des structures $\mathcal{A}_i$ ont au plus 5 éléments. Montrer que $\prod_{i \in I}^{\mathcal{U}} \mathcal{A}_i$ est une structure dont le domaine a au plus 5 éléments.

   (c) Si $\mathcal{A} \prec \mathcal{F}$ où $\mathcal{F}$ est la structure du point(a) et $\mathcal{A}$ est une autre $\mathcal{L}$-structure, que pouvez-vous dire de $\mathcal{A}$ par rapport à $\mathcal{F}$.

3. (a) Soit $I = \{1, 2\}$. Décrire tous les ultrafiltres sur I (explicitement).

   (b) Soit $I \neq \emptyset$ un ensemble fini. Décrire explicitement tous les ultrafiltres sur I.

   (c) Prouver qu'il existe un ultrafiltre non principal sur I, si et seulement si I est infini.

4. Soit $\mathcal{L} = \{R, ...\}$ un langage où R est un symbole de relation binaire. Soit T une théorie qui admet des modèles $\mathcal{M}_n$ ($n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$) vérifiant:

$$\mathcal{M}_n \models \exists X \ \exists Y_1 \ ... \ \exists Y_n \ \bigwedge_{i=1}^{n} R(Y_i, X) \ \wedge \bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} \neg(Y_i = Y_j)$$

Prouver que T a un modèle $\mathcal{M}_\infty$ vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$:

$$\mathcal{M}_\infty \models \exists X \ \exists Y_1 \ ... \ \exists Y_n \ \bigwedge_{i=1}^{n} R(Y_i, X) \ \wedge \bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} \neg(Y_i = Y_j)$$

(La rigueur apportée à la démonstration est importante).

5. (a) Soit A un algorithme écrit dans votre langage de programmation favori. Supposons que A détermine exactement les entiers positifs n vérifiant une propriété $P(n)$ et que $E = \{n \in \mathbb{N} \mid P(n)\}$ est infini. Expliquer pourquoi E un espace.

   (b) Soit $X \subseteq \Sigma^*$ où Σ est un alphabet fini et soit $w \in \Sigma^*$. Prouver que si X est un espace, alors $X \cup \{u \in \Sigma^* \mid uw \in X\}$ est un espace.

   (c) Expliquer pourquoi la relation unaire être un nombre premier de la forme $4n + 1$ est une relation diophantienne.

6. (a) En utilisant les théorèmes vus au cours, prouver que le cardinal de $\mathbb{Q}$ est $\aleph_0$ (c'est à dire $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{N}$ ont même cardinal).

   (b) Soit f une application (c'est à dire $dom f = \mathbb{R}$) injective de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, prouver que $Im f$ et $\mathbb{R}$ ont même cardinal (c'est à dire $2^{\aleph_0}$).

   (c) Soit $\mathcal{I}$ les irrationnels de $\mathbb{R}$, prouver que $\mathcal{I}$ et $\mathbb{R}$ ont même cardinal.

   (d) Prouver que $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}$ ont même cardinal.

   (e) Prouver que le cercle unité dans $\mathbb{C}$ a même cardinal que $\mathbb{R}$.