Logique mathématique
4 Mai 2004

Justifiez toutes vos réponses. La qualité de la rédaction de vos arguments sera notée.

1. Soit $\mathcal{L} = \langle f, R, a, b\rangle$ un langage du premier ordre où f est un symbole de fonction unaire, R est un symbole de relation binaire et a et b sont des symboles de constantes.

   (a) Décrire toutes les $\mathcal{L}-$formules atomiques.

   (b) Soit la $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{A} = \langle \mathbb{Z}, P, \leq, 0, 1\rangle$ où P est la fonction prédécesseur définie par $P(x) = x - 1$ et $\leq$ est la relation d'ordre usuelle.

   . Le $\mathcal{L}$-énoncé suivant est-il satisfait par $\mathcal{A}$?

   $$\varphi \;\equiv\; \forall Y\ \exists X \quad f(X) = Y$$

   . Même question avec le $\mathcal{L}$-énoncé ψ

   $$\psi \;\equiv\; \forall Y\big((\exists X)(f(X) = Y) \Leftrightarrow (\exists Z)(ZRY \wedge Z \neq Y)\big)$$

   (c) Soit la structure $\mathcal{B} = \langle \mathbb{Z} \setminus \{2\}, P_1, \leq, 0, 1\rangle$ où $P_1(z) = z$ si $z \neq 2$ et $z \neq 3$ et $P_1(3) = 1$. $\mathcal{B}$ est-elle une $\mathcal{L}$-structure?

   (d) A-t-on $\mathcal{A} \equiv_{\mathcal{L}} \mathcal{B}$?

   (e) Ecrire un $\mathcal{L}$-énoncé Θ tel que $\mathcal{A} \models \Theta$ soit équivalent à affirmer qu'il existe au moins deux entiers strictement plus grand qu'un entier donné.

2. Soit $\mathcal{L} = \langle +, \cdot, 0, 1\rangle$, soit les $\mathcal{L}$-structures $\mathcal{A} = \langle \mathbb{R}, +_{\mathbb{R}}, \cdot_{\mathbb{R}}, 0_{\mathbb{R}}, 1_{\mathbb{R}}\rangle$ et $\mathcal{B} = \langle \mathbb{C}, +_{\mathbb{C}}, \cdot_{\mathbb{C}}, 0_{\mathbb{C}}, 1_{\mathbb{C}}\rangle$

   (a) $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont-elles élémentairement équivalentes?

   (b) Ecrire une formule qui exprime que tout polynôme de degré 4 a une racine.

   (c) Soit la famille de $\mathcal{L}$-structures $(\mathcal{A}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ définie par $\mathcal{A}_i = \mathcal{A}$ si $i \in 2\mathbb{N}$ et $\mathcal{A}_i = \mathcal{B}$ sinon. Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre sur $\mathbb{N}$, soit $\Pi^{\mathcal{U}}_{i\in\mathbb{N}}\mathcal{A}_i$ l'ultraproduit construit sur la famille $(\mathcal{A}_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Est-ce un corps commutatif ?

   (d) . Le polynôme $X^2 - 1$ a-t-il une racine dans $\Pi^{\mathcal{U}}_{i\in\mathbb{N}}\mathcal{A}_i$?

   . Même question pour le polynôme $X^2 + 1$.

   (e) Prouver que $\Pi^{\mathcal{U}}_{i\in\mathbb{N}}\mathcal{A}_i$ est algébriquement clos si et seulement si $X^2 + 1$ a une racine dans $\Pi^{\mathcal{U}}_{i\in\mathbb{N}}\mathcal{A}_i$.

3. (a) Soit $\mathcal{F}$ un filtre sur I. Prouver que si $\mathcal{F}$ est un ultrafiltre alors pour toutes parties X, Y de I, on a $X \cup Y \in \mathcal{F} \Rightarrow X \in \mathcal{F}$ ou $Y \in \mathcal{F}$.
   (b) Prouver la réciproque du point précédent.
   (c) Soit I un ensemble fini. Décrire explicitement tous les ultrafiltres sur I. Quel est le cardinal $\{\mathcal{U} \mid \mathcal{U}$ est un ultrafiltre sur $I\}$?

4. (a) $\{n \in \mathbb{N} \mid \exists m \in \mathbb{N}(m^2 = n)\}$ est-il un espace ?
   (b) Soit $P(n)$ la proposition *"n est premier"*, soit $Q(n)$ la proposition *"$n+2$ est premier"*, soit $A = \{n \in \mathbb{N} \mid P(n) \wedge Q(n)\}$. A est-il récursivement énumérable? Est-il décidable?
   (c) $B = \{n \in \mathbb{N} \mid \neg P(n) \vee Q(n)\}$ est-il récursivement énumérable?
   (d) Soit $\mathbf{A} = \{(x, n) \in \mathbb{N}^2$ tel que n est l'indice d'un algorithme et l'algorithme $[n]$ s'arrête sur la donnée $x\}$. $\mathbf{A}$ est-il décidable?
   (e) Soit $L \subseteq \Sigma^*$ où Σ est un alphabet fini. Soit f une fonction récursive de $\mathbb{N}^2$ dans Σ^*, vérifiant $(x, n) \in \mathbf{A}$ si et seulement si $f(x, n) \in L$, L est-il décidable?

5. Comparer les cardinaux des ensembles suivants deux à deux: $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{Q}$, $2^{\mathbb{C}}$. En déduire le cardinal de $\mathbb{R} \cup 2^{\mathbb{C}}$ et de $\mathbb{Q} \times \mathbb{C}$.

6. (a) Soit e le nombre 2.711828... vérifiant $\ln e = 1$. On sait que e est transcendant. Décrire le type de e sur $\mathbb{Q}$ ($tp_{\mathbb{Q}}(e)$). ??? avec quel langage ???
   (b) Soit Σ l'ensemble des énoncés suivants dans le langage $\langle +, \cdot, 0, 1, \leq \rangle$:
      . φ_0 qui exprime qu'on est un corps commutatif ordonné (c'est à dire l'ordre est compatible avec l'addition et la multiplication).
      . $\varphi_1 \equiv (\forall X)\,(X \geq 0 \Rightarrow (\exists Y)(Y^2 = X))$
      . les énoncés φ_n pour n impair et $n \geq 3$ où
      $\varphi_n \equiv (\forall Y_0, ..., Y_{n-1})(\exists X)(X^n + Y_{n-1}X^{n-1} + ... + Y_1 X + Y_0 = 0)$

   Un modèle de Σ est appelé un corps réel clos. Donner un modèle de Σ.
   (c) Prouver par compacité (ou par toute autre méthode) qu'il existe un corps réel clos K qui contient un élément u plus grand que tout entier positif et qui est carré dans K (i.e. $\exists v \in K \ : \ v^2 = u$).