Logique mathématique
26 avril 2005

Veuillez à justifier vos réponses; la qualité de la rédaction sera notée.

1. Soit $\mathcal{L} = \{f, a, b\}$ un langage avec un symbole de fonction unaire f et deux symboles de constantes a, b.

   (a) Donner les $\mathcal{L}$-termes de $\mathcal{L}$.

   (b) Donner les $\mathcal{L}$-formules atomiques de $\mathcal{L}$.

   (c) Exprimer par un $\mathcal{L}$-énoncé le fait que la fonction f est injective.

   (d) Montrer que $\mathcal{R} = \langle \mathbb{R}, \exp, 0, 1\rangle$ est une $\mathcal{L}$-structure.

   (e) Soit $\mathcal{S} = \langle \mathbb{R}, \sin, 0, 1\rangle$ une $\mathcal{L}$ structure (vous ne devez pas le prouver). Déterminer si $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ sont élémentairement équivalentes?

2. On considère tous les filtres sur $\mathbb{N}$.

   (a) Y-a-t-il un filtre comprenant $\{1, 2, 3\}$ et ne comprenant pas $\{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 3\}$. Si oui, décrivez ces filtres.

   (b) $\big\{\{1, 2, 3\}\big\}$ a-t-il la PIF ?

   (c) Soit $E \subseteq \mathcal{F}$ un filtre sur $\mathbb{N}$, E a-t-il la PIF ?

3. Soit I un ensemble infini, $\mathcal{L}$ un langage fixé et $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ une famille de $\mathcal{L}$-strucures vérifiant $Th_{\mathcal{L}}(\mathcal{A}_i) = T$ pour tout $i \in I$, soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre sur I. Quelle est $Th_{\mathcal{L}}(\Pi^{\mathcal{U}}\mathcal{A}_i)$?

4. Soit I un ensemble infini, $\mathcal{L}$ un langage fixé et $(\mathcal{B}_i)_{i\in I}$ une famille de $\mathcal{L}$-structures et $\mathcal{U}$ un ultrafiltre non-principal sur I.

   Supposons que pour tout $\mathcal{L}$-énoncé σ, on a que $E_\sigma = \{i \in I \,|\, \mathcal{B}_i \models \sigma\}$ est soit fini, soit cofini. Prouver que $Th_{\mathcal{L}}(\Pi^{\mathcal{U}}\mathcal{B}_i) = \{\sigma \,|\, \sigma \text{ est un } \mathcal{L} - \text{énoncé et } E_\sigma \text{ est cofini}\}$.

5. Soit $\mathcal{L}$ un langage fixé, soit $\theta(X)$ une $\mathcal{L}$-formule. Soit Z un symbole de prédicat unaire $\notin \mathcal{L}$. Soit $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ deux $\mathcal{L}$-structures. On considère le langage $\mathcal{L}_{\mathcal{Z}} = \mathcal{L} \cup \{\mathcal{Z}\}$. On peut naturellement considérer $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ comme des $\mathcal{L}_Z$-structures en interprétant Z par $Z^{\mathcal{A}} = \{a \in A \mid \mathcal{A} \models \theta(a)\}$.

   (a) Soit la $\mathcal{L}_Z$ formule

$$\varphi = \exists X_1 \exists X_2 \exists X_3 \Big(\bigwedge_{1 \leq i < j \leq 3} X_i \neq X_j \ \wedge \ \bigwedge_{1 \leq i \leq 3} Z(X_i) \Big)$$

   trouver une $\mathcal{L}$-formule ψ tel que $\mathcal{A} \models \varphi \Leftrightarrow \psi$.

   (b) Prouver que si $\mathcal{A} \equiv_{\mathcal{L}} \mathcal{B}$ alors $\mathcal{A} \equiv_{\mathcal{L}_Z} \mathcal{B}$.

   (c) Prouver que si $\mathcal{A} \prec_{\mathcal{L}} \mathcal{B}$ alors $\mathcal{A} \prec_{\mathcal{L}_Z} \mathcal{B}$.

6. (a) $\mathbb{R}^2$ est-il un espace?

   (b) $\{n \in \mathbb{N} \,|\, n$ est racine de $X^{17} + 3X^7 + 13X^5 + 5X^3 + 2X + 11\}$ est-il un espace? Est-ce un ensemble récursivement énumérable?

   (c) $\{n \in \mathbb{N} \,|\, n$ a pour reste 3 pour la division par $5\}$ est-il un espace? Est-ce un ensemble récursivement énumérable?

7. Calculer les cardinaux de $\mathbb{Z}[X] \cup \mathbb{N}$ et $\mathbb{R} \times 2^{\mathbb{C}}$.

8. Prouver (en utilisant Schroeder-Bernstein) que l'ensemble des parties finies de $\mathbb{R}$ a même cardinal que $\mathbb{R}$.