Examen d'algèbre JUIN 2004
Correction de la partie II

1. (a) *Décomposer le polynôme $X^3 + 5$ en facteurs irréductibles dans $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$.*

Pour décomposer un polynôme dans $\mathbb{C}[X]$, il faut trouver toutes ses racines. Nous sommes donc amenés à résoudre l'équation $X^3 = -5$ dans $\mathbb{C}$. En posant $X = \rho.cis(\theta)$ (avec $\rho \in \mathbb{R}^+$ et $\theta \in [0, 2\pi[$), on peut récrire l'équation précédente comme suit:

$$\rho^3 cis(3\theta) = 5cis(\pi) \tag{1}$$

On sait que deux nombres complexes, écrits sous forme trigonométrique sont égaux si et seulement si leurs modules et leurs arguments respectifs sont égaux. Résoudre l'équation(1) est donc équivalent à résoudre le système suivant:

$$\begin{cases} \rho^3 = 5 \\ 3\theta = \pi + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \tag{2}$$

Du système (2), on peut conclure que les trois racines du polynôme $X^3 + 5$ sont $\sqrt[3]{5}.cis(\pi/3)$, $\sqrt[3]{5}.cis(\pi)$ et $\sqrt[3]{5}.cis(5\pi/3)$. Ce qui permet de donner la factorisation de $X^3 + 5$ en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$:

$$X^3 + 5 = \left(X - \sqrt[3]{5}.cis(\pi/3)\right).\left(X + \sqrt[3]{5}\right).\left(X - \sqrt[3]{5}.cis(5\pi/3)\right) \tag{3}$$

La factorisation obtenue (4) est bien une factorisation en polnômes irréductibles, car chaque polynôme de cette factorisation est de degré 1.

Pour décomposer $X^3 + 5$ dans $\mathbb{R}[X]$, on va utiliser le fait que $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ et le théorème d'existence et d'unicité de la décomposition est facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$. Ces observations nous permettent de conclure que la décomposition en facteurs irréductibles de X^3+5 dans $\mathbb{R}[X]$ doit provenir de sa décomposition dans $\mathbb{C}[X]$. D'abord remarquons que (4) n'est pas une décomposition dans $\mathbb{R}[X]$. Pour obtenir de (4) il suffit de multiplier entre eux les facteurs de la forme $(X - \alpha)$ et $(X - \bar{\alpha})$ (où $\bar{\alpha}$ désigne le complexe conjugué du complexe α). Par un argument général vu au cours, le polynôme obtenu sera à coefficients réels et clairement irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ de par sa construction (via le théorème d'existence et d'unicité de la décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$). La décomposition de $X^3 + 5$ dans $\mathbb{R}[X]$ est donc donnée par:

$$X^3 + 5 = \left(X + \sqrt[3]{5}\right).\left(X^2 - 2\sqrt[3]{5}.cos(\pi/3)X + \sqrt[3]{25}\right) \tag{4}$$

Reste à décomposer $X^3 + 5$ dans $\mathbb{Q}[X]$, remarquons d'abord que ce polynôme est à coefficients dans $\mathbb{Z}$. On peut donc appliquer le critère E à $X^3 + 5$. En effet, en choisissant le nombre premier $p = 5$, on constate que p ne divise pas 1, p divise 0, p divise 5 et p^2 ne divise pas 5. Ce qui permet de conclure (via le critère E) que $X^3 + 5$ est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$. En appliquant le théorème de Gauss, on conclut qu'il est aussi irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$. Donc $X^3 + 5$ est sa propre décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{Q}[X]$.

(b) *Le polynôme* $X^5 + 10X^3 - 15X^2 + 20X - 5$ *a-t-il une racine dans* $\mathbb{Z}$*?* $\mathbb{R}$*?*

Ce polynôme est en fait irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$ (application du critère E avec $p = 5$). S'il est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$, en particulier il n'a pas de racine dans $\mathbb{Z}$ (vu qu'il est de degré 5).

Par un théorème vu au cours, tout polynôme à coefficients réels de degré impair a une racine réelle. Le polynôme considéré étant de degré 5 à coéfficients réels, il a donc bien une racine réelle.

2. (a) *On considère* $I = \{f \in \mathbb{R}[X] \mid f(1) = f(-1) = 0\}$*, on sait que* I *est un idéal de* $\mathbb{R}[X]$ *(vous ne devez pas le montrer), cet idéal est-il un idéal premier? maximal? Justifier.*

L'idéal I est formé des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ ayant à la fois 1 et -1 comme racine. On a en fait que l'idéal I est l'idéal engendré par le polynôme $X^2 - 1$. On prouve cette égalité d'ensemble comme suit:

- $I \subseteq \langle X^2 - 1\rangle$. Soit $f \in I$, on a que $f(1) = 0$ donc f est divisible par $X - 1$, on a aussi que $f(-1) = 0$ et donc f est aussi divisible par $X + 1$.Vu que $X - 1$ et $X + 1$ ne sont pas multiples l'un de l'autre, on a que f est divisible par $(X - 1)(X + 1) = X^2 - 1$. On a donc bien que f est multiple de $X^2 - 1$, c'est à dire $f \in \langle X^2 - 1\rangle$.
- $I \subseteq \langle X^2 - 1\rangle$. Soit $f \in \langle X^2 - 1\rangle$, on peut donc écrire $f = (X^2 - 1)g$ pour un certain $g \in \mathbb{R}[X]$. On a clairement que $f(1) = f(-1) = 0$ ce qui signifie que $f \in I$.

Par un théorème vu au cours, un idéal est premier dans $K[X]$ si et seulement si le polynôme qui l'engendre est irréductible dans $K[X]$. Le polynôme $X^2 - 1$ étant réductible ($X^2 - 1 = (X - 1).(X + 1)$), on a donc que I n'est pas premier. On sait aussi que tout idéal maximal est premier (résultat vu au cours). En utilisant la contraposée de ce résultat, on a que tout idéal qui n'est pas premier n'est pas maximal. Ce qui permet de conclure que I n'est pas maximal.

(b) *L'anneau* $\mathbb{R}[X]/I$ *a-t-il des diviseurs de* 0*? Justifier.*

Par un théorème vu au cours, un anneau quotient A/J est intègre si et seulement si J est un idéal premier de A. Donc, vu que I n'est pas premier dans $\mathbb{R}[X]$ (par le point précédent), on a que $\mathbb{R}[X]/I$ n'est pas intègre, c'est à dire qu'il a des diviseurs de 0.

3. *On considère le corps à trois éléments* $\mathbb{F}_3 = \{0, 1, 2\}$ *obtenu en faisant le quotient de l'anneau* $\langle \mathbb{Z}, +, \cdot, 0, 1\rangle$ *par l'idéal maximal* $3\mathbb{Z}$*. Pour rappel, les lois* $+$ *et* $\cdot$ *sur* $\mathbb{F}_3$ *sont définies comme suit:*

$+$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

$\cdot$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

(a) *On sait que* $\mathbb{F}_3[X]$ *est un anneau commutatif (vous ne devez pas le prouver), est-ce un corps? Justifier.*

Etant donné un corps K, on sait que les inversibles de $K[X]$ sont les inversibles de K ($(K[X])^* = K \setminus \{0\}$), résultat vu au cours. Un corps est un anneau A tel que tout élément non nul de A est un inverse. En particulier pour un corps K, le seul élément non inversible est 0. On a clairement que $X \in \mathbb{F}_3[X]$, $X \neq 0$ et $X \notin \mathbb{F}_3$ (c'est à dire X est un élément non nul et non inversible de $\mathbb{F}_3[X]$). Ce qui permet de conclure que $\mathbb{F}_3[X]$ n'est pas un corps.

(b) *Le polynôme $X + 1$ est-il réductible dans $\mathbb{F}_3[X]$?*

Non, par un résultat vu au cours qui dit que tout polynôme de degré 1 est irréductible.

(c) *Donner la décomposition en facteurs irréductibles de $X^2 + X + 1$ et $X^2 + X + 2$ dans $\mathbb{F}_3[X]$.*

Les deux polynômes que nous devons décomposer en facteurs irréductibles sont de degré 2. Donc s'ils ne possèdent pas de racine dans $\mathbb{F}_3$, ils seront irréductibles. Les racines possibles dans $\mathbb{F}_3$ sont 0, 1, 2.
On voit clairement que 1 est racine de X^2+X+1 ce polynôme est donc divisible par $X-1 = X+2$. Après division, on obtient que $X^2+X+1 = (X+2).(X+2)$. Ce qui constitue bien une décomposition en facteurs irrécuctibles vu que tous les facteurs sont de degré 1.
Après avoir testé les trois valeurs possibles, on remarque que $X^2 + X + 2$ n'a pas de racine dans $\mathbb{F}_3$ il est donc irréductible dans $\mathbb{F}_3[X]$, car il est de degré 2.

(d) *Soit $J = \{f.(X^2+X+2) \mid f \in \mathbb{F}_3[X]\}$, on sait que J est un idéal de $\mathbb{F}_3[X]$ (vous ne devez pas le prouver). L'anneau $\mathbb{F}_3[X]/J$ est-il un corps? Justifier.*

Par un théorème vu au cours J est un idéal premier de $\mathbb{F}_3[X]$ si et seulement si $X^2 + X + 2$ est irréductible dans $\mathbb{F}_3[X]$. Par le point précédent, on peut donc conclure que J est un idéal premier. De plus, vu que $\mathbb{F}_3[X]$ est un anneau commutatif, intègre et principal (vu que $\mathbb{F}_3$ est un corps), on a que tout idéal premier est maximal (vu au cours). Ce qui permet de conclure que J est maximal. Par un théorème vu au cours un anneau quotient A/I est un corps si et seulement si I est un idéal maximal de A. On a donc que $\mathbb{F}_3[X]/J$ est un corps.

(e) *Calculer $|\mathbb{F}_3[X]/J|$.*

Par définition de l'anneau quotient, on a que $\mathbb{F}_3[X]/J = \{f + J \mid f \in \mathbb{F}_3[X]\}$. Cependant, on peut se restreindre à considérer les polynômes f qui sont reste de la division par X^2+X+2 (le générateur de J) dans $\mathbb{F}_3[X]$ (vu au cours). Cette observation permet de récrire le quotient sous la forme suivante: $\mathbb{F}_3[X]/J = \{aX + b + J \mid a, b \in \mathbb{F}_3\}$. On peut dès lors conclure que $|\mathbb{F}_3[X]/J| = 9$.