Exercices : Analyse combinatoire et probabilité

1. Le jeu de *Cluedo* consiste à retrouver l'assassin du Dr. Lenoir, l'arme et le lieu du crime. Sachant qu'il y a six armes, neuf lieux et six suspects, de combien de manières différentes le meurtre a-t-il pu être commis ?
2. Dans une université, dont la faculté des sciences se compose de sept professeurs d'informatique, quinze professeurs de chimie, douze professeurs de physique, huit professeurs de mathématique et cinq professeurs de biologie, combien de choix d'un représentant de la faculté de sciences peut-on faire ?
3. Les plaques d'immatriculation belges sont constituées de trois lettres suivies de trois chiffres (exemple : ABC-123). Combien de plaques différentes peut-on produire ?
4. A l'aide des six chiffres : $2, 3, 5, 6, 7, 9$:
   (a) combien de nombres de trois chiffres peut-on former ?
   (b) combien de ces nombres sont inférieurs à 400 ?
   (c) combien de ces nombres sont supérieurs à 600 ?
   (d) combien de ces nombres sont pairs ?
   (e) combien de ces nombres sont impairs ?
   (f) combien de ces nombres sont des multiples de cinq ?
5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Ecrire un algorithme (en pseudo-code) qui calcule la factorielle de n. Prouver la correction et la terminaison de votre algorithme.
6. Prouver que toute suite de $n^2 + 1$ nombres réels distincts contient une sous-suite de longueur $(n + 1)$ qui est soit strictement croissante ou strictement décroissante.
7. Soit une course de quatorze chevaux.
   (a) Combien de tiercés différents peut-on jouer ?
   (b) Combien de quartés différents peut-on jouer ?
   (c) Combien de quintés différents peut-on jouer ?
8. Lors de l'élection du titre très convoité de *Mister Info*, le jury doit élire *Mister Info* et son dauphin. Sachant qu'il y a 25 candidats, combien de choix sont possibles.
9. Lors du conseil d'institut d'informatique, un président et un secrétaire doivent être élus. Donner le nombre de résultats possibles de l'élection dans les cas suivants :
   (a) Cinq professeurs et trois étudiants sont présents, tous peuvent devenir secrétaire ou président.
   (b) Sept professeurs et quatre étudiants sont présents, tous peuvent devenir secrétaire mais seul un professeur peut devenir président.
10. De combien de façons peut-on choisir cinq représentants d'une classe contenant 23 élèves ?
11. Prouver que le nombre de permutations de n objets est égal à $n!$.
12. La serrure d'un cadenas se compose de trois anneaux portant chacun tous les chiffres de 0 à 9. De combien de façons peut-on tenter un essai pour ouvrir le cadenas ?

13. Une firme a dix vendeurs, de combien de manières peut-on les diviser en :
    (a) deux groupes de six et quatre vendeurs,
    (b) deux groupes de sept et trois vendeurs.
14. De combien de façons peut-on former un jury de trois hommes et deux femmes parmi sept hommes et cinq femmes ?
15. Combien existe-t-il de mots dans chacun des cas suivants :
    (a) Mots de quatre lettres.
    (b) Mots de quatres lettres distinctes.
    (c) Mots de quatres lettres distinctes commençant par une voyelle.
    (d) Mots de quatres lettres distinctes commençant par une voyelle et se terminant par une consonne.
16. On considère le triangle de Pascal défini récursivement de la façon suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \quad ; \quad \forall 0 < p < n \quad \binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}.$$

On utilise souvent la représentation ci-dessous :

$$\begin{array}{cccc}
\binom{0}{0} & & & \\
\binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & \\
\binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

    (a) Calculer les six premières lignes du triangle du Pascal.
    (b) Prouver (par induction sur n) que $C_n^p = \binom{n}{p}$, quel que soit $p \in \mathbb{N}$.
    (c) Prouver l'égalité suivante (par induction sur n) :

$$(x+y)^n \ = \ \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, x^k \, y^{n-k}.$$

17. Prouver les égalités suivantes :

$$\text{(a)} \ \sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n \qquad \text{(b)} \ \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = 0 \qquad \text{(c)} \ \sum_{k=0}^{n} 2^k C_n^k = 3^n.$$

18. Soit Ω un univers (au plus dénombrable), A, $B \subseteq \Omega$ et $\mathbb{P} : 2^\Omega \to [0,1]$ une mesure de probabilité. Prouver les affirmations suivantes :

$$\mathbb{P}(\emptyset) = 0 \ ; \ \mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A) \ ; \ A \subseteq B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B) \ ;$$
$$\mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B) \ ; \ \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

19. On lance trois pièces de monnaie et on compte le nombre de *"face"*. Quel est l'univers Ω de cette expérience aléatoire ? Quelle est la probabilité que *"face"* apparaisse au moins une fois ?
20. Trois chevaux A, B et C s'affrontent lors d'une course. On sait que le cheval A a deux fois plus de chance de gagner que le cheval B et que le cheval B a deux fois plus de chance de gagner que le cheval C. Calculer (i) la probabilité que le cheval A gagne la course, (ii) la probabilité que le cheval C ne gagne pas la course.
21. Trois hommes et deux femmes prennent part à un tournoi d'échecs. Les personnes de même sexe ont même probabilité de gagner, mais une femme a deux fois plus de chance de gagner qu'un homme. Trouver la probabilité (i) qu'une femme remporte le tournoi, (ii) qu'un homme remporte le tournoi.
22. Six couples mariés se trouvent dans un restaurant.
    (a) Si deux personnes sont choisies aléatoirement, trouver la probabilité qu'elles soient mariées.
    (b) Si quatre personnes sont choisies aléatoirement, trouver la probabilité qu'aucun couple marié ne soit parmi ces quatre personnes.
23. Deux dés sont lancés. Sachant que les deux nombres apparus sont différents, trouver la probabilité
    (a) que la somme soit six.
    (b) qu'un 1 apparaisse sur l'un des deux dés.
    (c) que la somme soit inférieure ou égale à quatre.
24. Soient A et B deux événements tels que $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{3}$ et $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{4}$. Calculer (i) $\mathbb{P}(A|B)$, (ii) $\mathbb{P}(B|A)$, (iii) $\mathbb{P}(A \cup B)$, (iv) $\mathbb{P}(A^c|B^c)$ et (v) $\mathbb{P}(B^c|A^c)$.
25. Soit Ω l'univers, $A,\ B \subseteq \Omega$ et $\mathbb{P} : 2^\Omega \to [0,1]$ une mesure de probabilité. Prouver que si A et B sont des événements indépendants, alors A^c et B^c sont également indépendants.
26. **Problème des anniversaires** Combien de personnes (au minimum) doivent se trouver dans une pièce pour avoir une probabilité plus grande (ou égale) à un demi qu'au moins deux de ces personnes célèbrent leur anniversaire le même jour ?
27. **Filtres à spam Baysien** Dans le but de détecter automatiquement les messages électroniques indésirables (spam), certaines boîtes mails utilisent des *filtres Baysiens*. Un filtre à spam Baysien utilise les informations sur les mails précédemment reçus pour "deviner" si un message entrant est (ou non) un spam. En particulier, il se focalise sur l'occurence de certains mots apparaissant dans le mail (i.e. "viagra", "rolex",...)

    On suppose que l'on a partitionné les messages reçus d'une boîte mail donnée entre les messages qui sont des spams (on note B cet ensemble) et les messages qui ne sont pas des spams (on note G cet ensemble). Soit ω un mot, on note $n_B(\omega)$ (resp. $n_G(\omega)$) le nombre de messages de l'ensemble B (resp. G) contenant le mot ω.

    Supposons que l'on reçoive un nouveau message contenant le mot ω. On voudrait déterminer la probabilité que ce message soit un spam. On note S (resp. S^c) l'événement *"est un spam"* (resp. *"n'est pas un spam"*) et E_ω l'événement *"contient le mot ω'*. Par le théorème de Bayes, la probabilité qu'un message est un spam, sachant qu'il contient le mot ω est donnée par :

$$\mathbb{P}(S|E_\omega) = \frac{\mathbb{P}(E_\omega|S)\mathbb{P}(S)}{\mathbb{P}(E_\omega|S)\mathbb{P}(S) + \mathbb{P}(E_\omega|S^c)\mathbb{P}(S^c)}. \tag{1}$$

Pour évaluer cette expression, on a besoin d'estimer les différentes composantes.

- $\mathbb{P}(S)$ (resp. $\mathbb{P}(S^c)$) la probabilité qu'un message envoyé soit (resp. ne soit pas) un spam. Sans donnée supplémentaire, on peut supposer que $\mathbb{P}(S) = \frac{1}{2}$ (resp. $\mathbb{P}(S^c) = \frac{1}{2}$). *(Il est à noter que si l'on possède des données empiriques sur le pourcentage des spams parmi les messages envoyés, on peut affiner cette estimation.)*
- $\mathbb{P}(E_\omega|S)$ la probabilité qu'un message contienne le mot ω sachant que c'est un spam. Pour cela, on utilise nos données, en estimant $\mathbb{P}(E_\omega|S)$ par $\frac{n_B(\omega)}{|B|}$, noté $p(\omega)$.
- $\mathbb{P}(E_\omega|S^c)$ la probabilité qu'un message contienne le mot ω sachant que ce n'est pas un spam. De la même façon, on estime $\mathbb{P}(E_\omega|S^c)$ par $\frac{n_G(\omega)}{|G|}$, noté $q(\omega)$.

L'équation (1) devient alors :

$$\mathbb{P}(S|E_\omega) = \frac{p(\omega)}{p(\omega) + q(\omega)}.$$

Le filtre à spam peut alors décréter qu'un message est un spam si $\mathbb{P}(S|E_\omega)$ est au-delà d'un certain seuil (0.9 par exemple).

Soit une boîte mail contenant 3000 messages, on considère que 2000 de ces messages sont des spams. On suppose que le mot "lottery" apparaît dans 250 des 2000 spams et seulement dans 5 des messages qui ne sont pas des spams. Quelle est la probabilité qu'un mail contenant le mot "lottery" soit un spam ?

28. Un joueur lance une pièce deux fois. Il gagne deux euros s'il obtient deux *face*, un euro s'il obtient une fois *face* et il perd trois euros s'il ne voit pas *face*. Calculer l'espérance de gain du joueur dans ce jeu.
29. Trois pièces sont lancées en l'air, on note Ω l'univers de cette expérience aléatoire ; i.e. $\Omega = \{F, P\}^3$. Soit $\omega \in \Omega$, on note n_f (resp. n_p) le nombre de face (resp. de pile) présent dans ω. Calculer l'espérance des variables aléatoires $X_i : \Omega \to \mathbb{R}$ suivantes :

$$X_1(n_p, n_f) = n_p + n_f \quad ; \quad X_2(n_p, n_f) = n_p - n_f \quad ; \quad X_3(n_p, n_f) = \min(n_p, n_f).$$

30. Soit un examen qui consiste en une série de dix *Vrai ou Faux* (dans lequel les étudiants ne doivent pas justifier leurs réponses). Dans chacun des cas suivants, calculer (i) la probabilité qu'un étudiant qui répond au hasard réussisse l'examen (i.e. obtienne une note supérieure ou égale à cinq sur dix) ; (ii) la note moyenne obtenue par un tel étudiant.

	bonne réponse	**mauvaise réponse**	**abstention**
Cas 1	+1	0	0
Cas 2	+1	-1	0
Cas 3	+2	+0.5	-3

31. On considère l'expérience aléatoire où une pièce de monnaie et un dé (à six faces) sont lancés en même temps. On appelle A l'événement *"La pièce tombe sur face"* et B l'événement *"Un nombre pair apparaît sur la face supérieure du dé"*.
    (a) Décrire l'univers Ω de cette expérience aléatoire.
    (b) Déterminer la probabilité des événements suivants : A ; A et B ; A ou B ; A sachant B.
    (c) Déterminer si les événements A et B sont indépendants.

    (Examen juin 2008)
32. Soit Ω l'univers (fini) d'une expérience aléatoire, $\mathbb{P}$ une mesure de probabilité sur Ω et $X \subseteq \Omega$. Prouver que $\mathbb{P}(X^c) = 1 - \mathbb{P}(X)$. *(Examen juin 2009)*
33. Un joueur lance trois fois une pièce de monnaie. Il gagne cinq euros s'il obtient au moins deux fois *face*, un euro s'il n'obtient qu'une seule fois *face* et il perd dix euros s'il ne voit pas *face*. Calculer l'espérance de gain du joueur dans ce jeu (en précisant quel est l'univers, la fonction de probabilité et la variable aléatoire que vous considérez). *(Examen juin 2009)*
34. Décider si l'affirmation suivante est vraie ou fausse. Justifier votre réponse.
    Soit Ω l'univers (fini) d'une expérience aléatoire, $\mathbb{P}$ une mesure de probabilité sur Ω et $X \subseteq \Omega$. Si $\mathbb{P}(X) = 1$, alors $X = \Omega$.
    (Examen juin 2009)
35. Un joueur se rend au casino et décide de jouer à la roulette. Pour simplifier les choses, on suppose que la roulette est numérotée de 1 à 36 et que le joueur pariera sur le fait que la bille stoppe sur un nombre *pair* ou *impair* de telle sorte que s'il gagne, il reçoit le double de ce qu'il a misé. Ce joueur va jouer de la façon suivante : (i) il mise toujours sur *pair*, (ii) chaque fois qu'il perd, il rejoue en doublant la mise qu'il vient de perdre, (iii) il arrête de jouer s'il gagne ou s'il a perdu cinq fois de suite. Sa mise initiale est de un euro.
    (a) Donner l'univers, la probabilité et la variable aléatoire qui permettent de décrire cette situation.
    (b) Quelle est la probabilité que le joueur ne gagne pas ?
    (c) Prouver que s'il gagne, le joueur gagnera toujours exactement un euro.
    (d) Calculer l'espérance de gain de ce joueur.
    (e) Quelle somme d'argent ce joueur doit-il avoir en poche en entrant dans le casino pour être certain de pouvoir appliquer sa stratégie quoi qu'il arrive ?

    (Examen août 2009)
36. Un homme se trouve dans un bar, et toutes les cinq minutes, il se demande s'il va commander une autre bière ou s'il va rentrer chez lui (étudier son cours de mathématiques discrètes). A chaque fois qu'il se pose la question, il prend la décision de reprendre une bière avec probabilité $\frac{2}{3}$ et il rentre donc chez lui avec probabilité $\frac{1}{3}$.
    (a) Donnez l'univers qui permet de décrire cette situation.
    (b) Quelle est la probabilité que ce brave homme rentre chez lui après 15 minutes ?

(c) Quelle est la probabilité que ce brave homme ne rentre jamais chez lui ?

(d) Donnez la mesure de probabilité associée à cette situation et prouvez qu'il s'agit bien d'une mesure de probabilité.

(Examen juin 2010)

37. On tire **successivement** deux cartes dans un jeu de cartes complet (la première carte **n**'est **pas** remise dans le tas avant de tirer la seconde). Soient A l'événement *"la première carte tirée est une figure (valet, dame ou roi) rouge"* et B l'événement *"la deuxième carte tirée est une carte noire"*. Ces deux événements sont-ils indépendants ?
(Examen juin 2010)

38. Dans la rue, Mister Proba vous propose de participer au jeu suivant pour la modique somme de dix euros. Votre objectif est de lancer deux dés dans le but que la somme des dés se rapproche au maximum de 9 sans dépasser cette valeur. Si vous obtenez exactement 9, Mister Proba vous rend vingt euros (i.e. vous gagnez dix euros). Si vous obtenez un total strictement supérieur à 9, Mister Proba ne vous rend rien (i.e. vous perdez dix euros). Si vous obtenez un total égal à n, avec $2 \leq n \leq 8$, Mister Proba vous rend n euros.

(a) Sous l'hypothèse que les dés ne sont pas truqués, donnez l'univers Ω, la probabilité $\mathbb{P}$ et la variable aléatoire X qui permettent de décrire cette situation.

(b) Déterminez si votre espérance de gain à ce jeu, i.e. l'espérance de la variable aléatoire X, est positive.

Imaginons maintenant que vous avez lancé les deux dés et que vous avez obtenu un 3 et un 4 totalisant une somme de 7. Mister Proba vous propose de relancer l'un des deux dés contre un paiement de cinq euros supplémentaires.

(c) Parmi les trois situations suivantes, laquelle est la plus intéressante (pour vous) : (i) Refuser l'offre de Mister Proba, (ii) Relancer le dé affichant 3, (iii) Relancer le dé affichant 4.

(d) Les événements *"Obtenir une somme de* 9*"* et *"Obtenir une somme de* 9 *sachant que le premier dé affiche* 3*"* sont-ils indépendants ?

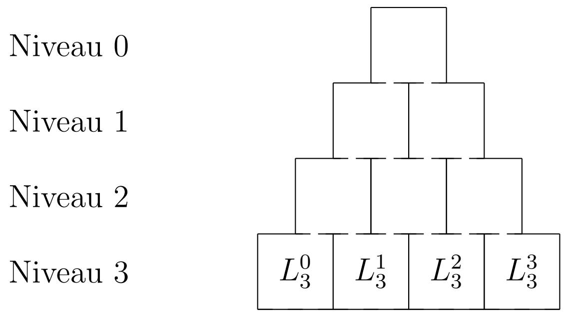
(Examen août 2010)

39. Un scientifique étudie le comportement d'une souris lorsqu'elle est placée dans des labyrinthes triangulaires. Un tel labyrinthe de type 3 est représenté ci-dessous. La souris est placée dans l'unique case du niveau 0 et évolue ensuite vers les niveaux supérieurs. Les trappes ne permettent que de passer d'un niveau i vers un niveau $i + 1$ (notre souris ne peut donc jamais retourner en arrière). Hormis au dernier niveau, la souris ne reste jamais dans une pièce du labyrinthe et possède toujours exactement deux choix de sortie.

Supposons que chaque fois que notre souris doit faire un choix, elle va à gauche avec probabilité un demi et à droite avec probabilité un demi.

(a) Dans le labyrinthe de type 3, quelle est la probabilité que la souris arrive en L_3^0 ? En L_3^1 ?

(b) On considère maintenant un labyrinthe de type 4. A l'aide de la question précédente, calculer la probabilité que la souris arrive en L_4^1.



(c) Dans un labyrinthe de type n, calculer la probabilité que la souris arrive en L_n^0.

(d) Dans un labyrinthe de type n, calculer la probabilité que la souris arrive en L_n^k avec $0 \leq k \leq n$.

(Examen juin 2011)

40. Soit $n \in \mathbb{N}_0$. On considère une expérience aléatoire où une pièce de monnaie (non truquée) est lancée n fois. On suppose que les différents lancers de la pièce sont indépendants. On s'intéresse aux événements $(p, f) \in \mathbb{N}^2$ où p (resp. f) représente le nombre de fois que la pièce est tombée sur pile (resp. face) au cours des n lancers. On note $(\Omega_n, \mathbb{P}_n)$ l'espace de probabilité associé à cette expérience.

Déterminez si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

(a) L'univers Ω_3 contient 3 éléments.

(b) Dans le cas où la pièce est lancée 3 fois, la probabilité que la pièce soit tombée sur pile exactement 1 fois est de $\frac{1}{3}$.

(c) Dans le cas où la pièce est lancée 4 fois, la probabilité que la pièce soit tombée sur face exactement 2 fois est de $\frac{3}{8}$.

(d) Quel que soit $n \in \mathbb{N}_0$, $\mathbb{P}_n((0, n)) = \mathbb{P}_n((n, 0)) = \frac{1}{2^n}$.

(e) Quel que soit $n \geq 2$, quel que soit $p \in \{1, \ldots, n-1\}$,

$$\mathbb{P}_n((p, n-p)) = \mathbb{P}_{n-1}((p-1, n-p)) + \mathbb{P}_{n-1}((p, n-p-1)).$$

(f) Quel que soit $n \in \mathbb{N}_0$, quel que soit $p \in \{0, \ldots, n\}$,

$$\mathbb{P}_n((p, n-p)) = \frac{n!}{p!\,(n-p)!\,2^n}.$$

(Examen août 2011)