Exercices Mathématiques Discrètes : Induction

1. Prouver par induction (sur $n \in \mathbb{N}$) les égalités suivantes :

$$\sum_{k=0}^{n}(2k+1) = (n+1)^2 \quad ; \quad \sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1.$$

2. Prouver par induction que $n < 2^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Prouver par induction que $2^n < n!$, pour tout $n \geq 4$.
4. Prouver par induction que $n^3 - n$ est divisible par 3 quel que soit $n \in \mathbb{N}$.
5. Prouver par induction que tout naturel ≥ 2 se décompose en produit de nombres premiers.
6. Donner un schéma d'induction permettant d'engendrer les arbres binaires non-vides. Prouver la correction de votre schéma.
7. On dit qu'un arbre binaire est *complet* si chaque noeud possède 0 ou 2 fils. Donner un schéma d'induction permettant d'engendrer les arbres binaires complets (non-vides). Prouver la correction de votre schéma.
8. Soit le schéma d'induction (B, R) où $B = \{\epsilon\}$ et R contient les règles suivantes :

$$\begin{array}{rcl} u, v & \rightarrow & uavb \\ u, v & \rightarrow & ubva. \end{array}$$

   (a) Montrer comment le schéma permet d'engendrer le mot *aabbab*.

   (b) Montrer que le schéma engendre exactement les mots ayant autant de a que de b.

   (c) Montrer qu'il y a deux façon d'engendrer *baba*.

9. Ecrire un schéma d'induction qui engendre exactement les mots binaires (c'est-à-dire sur l'alphabet $\{0, 1\}$) contenant exactement un 1. Prouver la correction de votre schéma.
10. Ecrire un schéma d'induction qui engendre exactement les mots binaires où chaque occurence de 1 est immédiatement précédée d'un 0. Prouver la correction de votre schéma.
11. On suppose que le nombre de bactéries dans un bouillon de culture triple toutes les heures. Donner une relation définie par récurrence qui décrit l'évolution des bactéries. Si le bouillon de culture contient 100 bactéries au départ, combien en contiendra-t-il dans 10 heures ?
12. Soit x_n le nombre de mots binaires de longueur n qui ne possèdent pas deux 0 consécutifs. Donner une relation définie par récurrence qui définit x_n. Résoudre cette équation et donner le nombre de mots binaires de longueur 5 qui ne possèdent pas deux 0 consécutifs.
13. Donner une forme explicite de x_n (indépendante de ces prédécesseurs) :

$$x_{n+2} = x_{n+1} + 2x_n \text{ avec } x_0 = x_1 = 1 \qquad ; \qquad x_{n+2} = x_{n+1} + x_n \text{ avec } x_0 = x_1 = 0.$$

14. On définit la suite de Fibonacci comme suit :

$$F(1) = F(2) = 1 \quad ; \quad F(k+2) = F(k+1) + F(k), \quad \forall k \geq 1.$$

   (a) Résoudre cette équation définie par récurrence.

   (b) Montrer, par récurrence, que la formule trouvée au point précédent est vraie.

15. Les schémas d'induction suivants sont-ils de bons schémas ? Si non, donner un bon schéma d'induction pour les ensembles engendrés par ces schémas.

   (a) $(\mathbf{B}, \mathbf{R})$ où $\mathbf{B} = \{0\}$ et $\mathbf{R} = \{r_1, r_2\}$ avec $r_1 : n \to n+1$ et $r_2 : n \to n-2$

   (b) $(\mathbf{B}, \mathbf{R})$ où $\mathbf{B} = \{(0,0)\}$ et $\mathbf{R} = \{r_1, r_2, r_3\}$ avec $r_1 : (a,b) \to (a+1,b)$, $r_2 : (a,b) \to (b,a)$ et $r_3 : (a,b) \to (a, b-1)$

   (c) $(\mathbf{B}, \mathbf{R})$ où $\mathbf{B} = \{1\}$ et $\mathbf{R} = \{r_1, r_2\}$ avec $r_1 : u \to u0$ et $r_2 : u \to \texttt{reverse}(u)$ (où $\texttt{reverse}(u) = \texttt{reverse}(u_1 \dots u_n) = u_n \dots u_1$)

16. Prouver par induction que $n \leq n^2$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. *(Examen janvier 2008)*

17. Soit le schéma d'induction (B, R) où $B = \{aab, aba, baa\}$ et R contient les trois règles suivantes :

$$\begin{array}{rcl} u,v,w & \to & auavbw \\ u,v,w & \to & aubvaw \\ u,v,w & \to & buavaw \end{array}$$

   (a) Montrer comment le schéma permet d'engendrer le mot *aaabbabaabaa*.

   (b) Montrer que tous les mots engendrés par le schéma contiennent deux fois plus de a que de b. Plus formellement, si n_a (resp. n_b) représente le nombre de a (resp. b), il faut montrer que pour tout mot engendré par le schéma, on a $n_a = 2n_b$.

   (c) Ce schéma permet-il d'engendrer tous les mots non vides qui contiennent deux fois plus de a que de b ? Justifier votre réponse.

   (Examen janvier 2008)

18. Etudier, en fonction du paramètre réel $\lambda \neq 1$, le comportement limite (i.e. $\lim_{n \to +\infty} x_n$) de la suite définie par la relation de récurrence suivante :

$$x_{n+2} = (\lambda + 1) x_{n+1} - \lambda\, x_n,$$

   lorsque les conditions initiales sont données par $x_0 = 0$ et $x_1 = 1$.
   (Examen janvier 2008)

19. Prouver l'égalité suivante par induction (sur $n \in \mathbb{N}$) :

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

   (Examen juin 2008)

20. Décider si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.
   (a) Le schéma $(\mathbf{B}, \mathbf{R})$ où $\mathbf{B} = \{\epsilon\}$ et $\mathbf{R} = \{r_1, r_2, r_3\}$ avec
   $$r_1 : u \to aua \quad ; \quad r_2 : u \to bu \quad ; \quad r_3 : u \to ub,$$
   engendre exactement les mots finis sur $\{a, b\}$ qui contiennent un nombre pair de a.
   (b) Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, l'inégalité suivante est vérifiée $n^2 \leq (n+1)^2$.
   (c) Quel que soit $n \in \mathbb{N}$ la matrice M_n définie par $M_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n$ est inversible.
   (d) Le schéma $(\mathbf{B}, \mathbf{R})$ où $\mathbf{B} = \{ab, ba\}$ et $\mathbf{R} = \{r_1, r_2, r_3, r_4\}$ avec
   $$r_1 : u \to abu \quad ; \quad r_2 : u \to bau \quad ; \quad r_3 : u \to uab, ; \quad r_4 : u \to uba,$$
   engendre exactement les mots finis non vides de $\{a, b\}$ qui contiennent autant de a que de b.

   (Examen janvier 2009)
21. Prouvez l'égalité suivante par induction sur $n \in \mathbb{N}_0$:
   $$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} 2^n & 2^n \\ 2^n & 2^n \end{pmatrix}.$$
   (Examen août 2009)
22. On considère le schéma $(\mathbf{B}, \mathbf{R})$ où $\mathbf{B} = \{0\}$ et $\mathbf{R} = \{r_1, r_2\}$ avec
   $$r_1 : n \to n+2 \quad ; \quad r_2 : n \to n-3.$$
   Déterminez l'ensemble engendré par ce schéma. Justifiez votre réponse.
   (Examen août 2009)
23. On considère le schéma $(\mathbf{B}, \mathbf{R})$ où $\mathbf{B} = \{6, 35\}$ et $\mathbf{R} = \{r_1, r_2\}$ avec
   $$r_1 : (n_1, n_2) \to n_1 + n_2 \quad ; \quad r_2 : (n_1, n_2) \to \text{pgcd}(n_1, n_2).$$
   – Montrez que tout naturel non-nul est engendré par ce schéma.
   – Est-ce que $(\mathbf{B}, \mathbf{R})$ est un bon schéma ?
   (Examen janvier 2010)
24. On note $\mathbb{N}[x]$ l'ensemble des *polynômes à coefficients naturels*, i.e.
   $$\mathbb{N}[x] = \{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \mid n \in \mathbb{N} \text{ et } a_i \in \mathbb{N}\}.$$
   Soit $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ un polynôme à coefficients naturels, on définit le degré de $p(x)$, noté $\deg(p(x))$ comme suit :
   $$\deg(p(x)) = \max\{i \in \mathbb{N} \mid a_i \neq 0\}.$$
   Par exemple, $\deg(x^2 + 5) = 2$, $\deg(11) = 0$ et $\deg(0x^4 + x^3 + 7) = 3$.
   On considère le schéma d'induction $(\mathbf{B}, \mathbf{R})$ où $\mathbf{B} = \{0\}$ et $\mathbf{R} = \{r_1, r_2\}$ avec :
   $$p(x) \xrightarrow{r_1} p(x) + 1 \quad ; \quad p(x) \xrightarrow{r_2} x \cdot p(x)$$

(a) Montrez comment le schéma $(\mathbf{B},\mathbf{R})$ permet d'engendrer le polynôme $2x^3+x^2+3$.

(b) Prouvez que tout élément engendré par le schéma $(\mathbf{B},\mathbf{R})$ est un polynôme à coefficients naturels.

(c) Soit $a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ un polynôme à coefficients naturels. Prouvez (par induction sur a_0) que ce polynôme peut être engendré par le schéma $(\mathbf{B'},\mathbf{R})$ où $\mathbf{B'}=\{a_1x+\cdots+a_nx^n\}$.

(d) Soit $p(x)\in\mathbb{N}[x]$, prouvez (par induction sur $\deg(p(x))$) que $p(x)$ peut être engendré par le schéma $(\mathbf{B},\mathbf{R})$.

(Examen janvier 2010)

25. On considère le schéma d'induction $(\mathbf{B},\mathbf{R})$ où $\mathbf{B}=\{(0,0)\}$ et $\mathbf{R}=\{r_1,r_2\}$ avec :

$$(a,b)\xrightarrow{r_1}(a+2,b)\qquad;\qquad(a,b)\xrightarrow{r_2}(a,b+3)$$

(a) Montrez comment le schéma $(\mathbf{B},\mathbf{R})$ permet d'engendrer le couple $(4,9)$.

(b) Tout élément engendré par le schéma $(\mathbf{B},\mathbf{R})$ appartient-il à $2\mathbb{N}\times3\mathbb{N}$?

(c) Tout élément de $2\mathbb{N}\times3\mathbb{N}$ peut-il être engendré par le schéma $(\mathbf{B},\mathbf{R})$?

(Examen août 2010)

26. Décidez si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

(a) $\forall n\in\mathbb{Z}\ |n|\leq n^2$.

(b) Le schéma $(\mathbf{B},\mathbf{R})$ permet d'engendrer tous les multiples de 3 ; où $\mathbf{B}=\{2,3\}$ et $\mathbf{R}=\{r_1,r_2\}$ avec :

$$x,y\xrightarrow{r_1}\mathrm{pgcd}(x,y)\qquad;\qquad x,y\xrightarrow{r_2}\mathrm{ppcm}(x,y).$$

(Examen janvier 2011)

27. Soit $X\subseteq\mathbb{N}$, on note $|X|$ le nombre d'éléments de X. On considère le schéma d'induction (sur les parties de $\mathbb{N}$) $(\mathbf{B},\mathbf{R})$ où $\mathbf{B}=\big\{\{0\}\big\}$ et $\mathbf{R}=\{r_1,r_2,r_3\}$ avec :

$$X\xrightarrow{r_1}X\cup\{|X|\}\qquad;\qquad X\xrightarrow{r_2}X^c\qquad;\qquad X,Y\xrightarrow{r_3}X\cap Y.$$

(a) Le schéma $(\mathbf{B},\mathbf{R})$ permet-il d'engendrer les ensembles $\{0,1,\ldots,n\}$ quel que soit $n\in\mathbb{N}$?

(b) Le schéma $(\mathbf{B},\mathbf{R})$ permet-il d'engendrer l'ensemble $\{1\}$?

(c) Le schéma $(\mathbf{B},\mathbf{R})$ permet-il d'engendrer les ensembles $\{n\}$ quel que soit $n\in\mathbb{N}$?

(d) Le schéma $(\mathbf{B},\mathbf{R})$ permet-il d'engendrer toutes les parties **finies** de $\mathbb{N}$?

(Examen janvier 2011)

28. Trouvez (si possible) un exemple dans chacune des situations suivantes. Dans le cas où il est impossible de trouver un exemple, justifiez pourquoi.

(a) Un polynôme, avec (au moins) une racine non entière, qui est engendré par le schéma $(\mathbf{B},\mathbf{R})$ où $\mathbf{B}=\{1,x\}$ et $\mathbf{R}=\{r_1,r_2\}$ avec :

$$p(x),q(x)\xrightarrow{r_1}p(x)+q(x)\qquad;\qquad p(x),q(x)\xrightarrow{r_2}p(x)\cdot q(x).$$

(b) Un polynôme, avec (au moins) une racine non entière, qui est engendré par le schéma $(\mathbf{B}, \mathbf{R})$ où $\mathbf{B} = \{1, x\}$ et $\mathbf{R} = \{r_1, r_2\}$ avec :

$$p(x) \xrightarrow{r_1} p(x) \cdot (x - 3) \qquad ; \qquad p(x), q(x) \xrightarrow{r_2} p(x) \cdot q(x).$$

(Examen janvier 2011)