Exercices Mathématiques Discrètes : Logique

1. Soient les propositions (atomiques) suivantes :

$$p_1 \equiv 1+1=2 \quad ; \quad p_2 \equiv 1>5 \quad ; \quad p_3 \equiv 1+1=3.$$

   Déterminer la valeur de vérité des formules suivantes :

$$p_1 \vee p_3 \quad ; \quad p_2 \Rightarrow p_1 \quad ; \quad p_3 \Rightarrow (p_1 \vee p_2).$$

2. Constuire la table de vérité de $(p_1 \Leftrightarrow p_2) \Rightarrow p_3$.
3. Prouver les équivalences suivantes :

$$\begin{array}{ll}
p \wedge 1 \equiv p & p \vee 1 \equiv 1 \\
p \vee 0 \equiv p & p \wedge 0 \equiv 0 \\
\\
p \vee p \equiv p & p \vee \neg p \equiv 1 \\
p \wedge p \equiv p & p \wedge \neg p \equiv 0 \\
\neg(\neg p) \equiv p & \\
\\
p \vee q \equiv q \vee p & \neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q \\
p \wedge q \equiv q \wedge p & \neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q \\
\\
(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r) & p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r) \\
(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r) & p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \\
\\
p \Rightarrow q \equiv \neg p \vee q & p \Leftrightarrow q \equiv \neg p \Leftrightarrow \neg q \\
\neg(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \neg q & p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) \\
(p \Rightarrow q) \equiv (\neg q \Rightarrow \neg p) & \neg(p \Leftrightarrow q) \equiv p \Leftrightarrow \neg q
\end{array}$$

4. Soit $A = \{1,2,3,4,5\}$ le domaine des prédicats de l'exercice. Déterminer si les formules suivantes sont vraies ou fausses.

$$\exists x\ (x+3=5) \quad ; \quad \exists x\ (x+1=15) \quad ; \quad \forall x\ (x<4) \quad ; \quad \forall x\ (x+10<25) \quad ;$$
$$\forall x\ ((x>6) \Rightarrow (x<2)) \quad ; \quad \exists x\ ((x^2=121) \wedge (x>0)).$$

5. Décider si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifier votre réponse.
   (a) Soit A un ensemble non vide et $P(x_1,x_2)$ un prédicat de domaine A^2, la formule suivante est une tautologie :

$$\forall x_1\ \exists x_2\ P(x_1,x_2)\ \Leftrightarrow \exists x_2\ \forall x_1\ P(x_1,x_2).$$

   (b) Soit A un ensemble non vide et $P(x_1,x_2)$ un prédicat de domaine A^2, la formule suivante est une tautologie :

$$\exists x_1\ \forall x_2\ P(x_1,x_2)\ \Rightarrow\ \forall x_2\ \exists x_1\ P(x_1,x_2).$$

(c) Si $\sin(x)$ a une unique racine alors tout nombre premier est impair.

(d) Soit A un ensemble et $P(x)$ un prédicat de domaine A, la formule suivante est une tautologie :

$$\forall x\ P(x) \ \Rightarrow\ \exists x\ P(x).$$

6. Déterminer si les formules suivantes sont vraies ou fausses, lorsque le domaine des prédicats utilisés est respectivement $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$. (Justifier votre réponse)
   (a) $\forall x\,\exists y\ (y < x)$.
   (b) $\forall x_1\,\forall x_2\ ((x_1 < x_2) \Rightarrow \exists y\ (x_1 < y < x_2))$.
   (c) $\exists x\ (x^2 = 2)$.
   (d) $\exists x\ (x^2 + 1 = 0)$.
7. Ecrire une formule qui exprime que le polynôme $X^2 + 2X + 1$ a exactement une racine.
8. Soit $P(x)$ un prédicat. Ecrire une formule exprimant qu'il y a *exactement* trois éléments qui satisfont le prédicat $P(x)$. Même question si l'on souhaite qu'il y ait au plus (resp. au moins) trois éléments quit satisfont $P(x)$.
9. Considérez l'algorithme (ou programme) ci-dessous :

   Entrées : $x, y \in \mathbb{Z}$

   Tant que $(x > y) \Rightarrow (x + 5 < y + 10)$ **faire**
       $x := x + 1$
       $y := y - 1$
   fin faire

   (a) Déterminer si ce programme s'arrête avec les entrées $x = 3$ et $y = 2$. Justifier.
   (b) Même question avec $x = 0$ et $y = 1$.
   (c) Donner la condition d'arrêt de l'algorithme.
   (d) Déterminer sur quelles entrées $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ le programme s'arrête.
10. Soient $P(x)$ et $Q(x)$ les deux prédicats de domaine $\mathbb{N}$ définis par :

$$P(x) \equiv \text{'}x \textit{ est un multiple de } 2\text{'} \text{ et } Q(x) \equiv \text{'}x \textit{ est un multiple de } 4\text{'}.$$

   Déterminer si les formules ci-dessous sont vraies. Justifier.

$$\forall x\ (P(x) \Rightarrow Q(x)) \quad ; \quad \exists x\ (P(x) \Rightarrow Q(x)) \quad ;$$
$$\forall x\ (Q(x) \Rightarrow P(x)) \quad ; \quad \neg(\forall x\ (P(x) \Rightarrow \neg Q(x))).$$

11. Soient $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ les deux prédicats de domaine $\mathbb{R}^2$ définis par :

$$P(x, y) \equiv x \cdot y = 0 \quad ; \quad Q(x, y) \equiv x^2 + y^2 > 0.$$

   Déterminer si les formules ci-dessous sont vraies. Justifier.

$$\forall x\,\forall y\ P(x, y) \quad ; \quad \forall x\,\exists y\ P(x, y) \quad ; \quad \exists x\,\forall y\ P(x, y) \quad ;$$
$$\exists x\,\exists y\ \neg(P(x, y) \Rightarrow Q(x, y)) \quad ; \quad \forall x\,\exists y\ P(x, y) \Leftrightarrow \exists x\,\forall y\ P(x, y) \quad ;$$
$$\neg(\forall x\,\forall y\ (P(x, y) \Rightarrow Q(x, y))).$$

12. On se place dans le cas où le domaine des prédicats est $\mathbb{R}$.
Trouver des formules de la logique des prédicats ne faisant pas apparaître de quantificateur ($\forall$ ou $\exists$) équivalentes aux formules suivantes :
– $\exists x \quad ax + b = 0$,
– $(a \neq 0) \wedge (\exists x \quad ax^2 + bx + c = 0)$
où a, b et $c \in \mathbb{R}$.
13. Même question mais dans le cas où le domaine des prédicats est $\mathbb{C}$.
14. On considère l'ensemble des prédicats suivant :
$$\mathcal{P} = \{x \leq n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{n \leq x \mid n \in \mathbb{N}\}$$
de domaine $A \subset \mathbb{N}$.
   (a) Montrer que les expressions qui suivent peuvent s'exprimer par des formules de la logique des prédicats sur $\mathcal{P}$:
   – $x = n$
   – $x < n$
   – $x \in \,]n_1, n_2]$
   – $x \in [n_1, n_2] \cup [n_3, +\infty[$
   où n, n_1, n_2 et n_3 sont des naturels.
   (b) Donner une procédure qui, étant donnés $A \subset \mathbb{N}$ fini et ϕ une formule sans variable libre de la logique des prédicats sur $\mathcal{P}$, donne la valeur de vérité de ϕ sur A.
   (c) Que se passe-t-il si $A = \mathbb{N}$.
15. Décider si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifier votre réponse.
   (a) La terre est plate si et seulement si tous les nombres premiers sont impairs.
   (b) La formule suivante est une tautologie :
$$\exists\, x \in \mathbb{N} \;\; \forall\, y \in \mathbb{N} \; (y \leq x) \;\; \Leftrightarrow \;\; \forall\, a \in \mathbb{N} \;\; \exists\, b \in \mathbb{N} \; (b < a).$$
   (c) Si φ_1 et φ_2 sont des tautologies, alors c'est aussi le cas de $\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2$.
   (d) Tout nombre naturel dont le carré est premier est un multiple de sept.
   (e) Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, si $n \geq 1$ alors n est racine du polynôme $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$.
   (f) L'algorithme ci-dessous s'arrête si et seulement l'entrée n est un nombre pair.

Entrées : $n \in \mathbb{N}$
Initialisation : $x := n$ et $k := 1$

Tant que $((x \geq 0) \wedge (k^2 + 1 < 100))$ **faire**
    Si $(x^2 + 1 \equiv_2 1)$ **alors** $k := 2k$ **et** $x := x + 4$
fin faire

(Examen janvier 2009)
16. Déterminer si la formule suivante est une tautologie. Justifier votre réponse.
$$\forall a \in \mathbb{R}\; \forall b \in \mathbb{R}\; \forall c \in \mathbb{R}\; \Big(\big(\exists x \in \mathbb{R}\; ax^2 + bx + c = 0\big) \Leftrightarrow \big(b^2 - 4ac \geq 0\big) \Big)$$
(Examen août 2009)

17. Décidez si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.
   (a) $\forall a \in \mathbb{Z}\ \exists x \in \mathbb{Z}\ x^2 - a = 0$.
   (b) $\forall a \in \mathbb{R}\ \exists x \in \mathbb{R}\ x^2 - a = 0$.
   (c) $\forall a \in \mathbb{Q}\ \forall b \in \mathbb{Q}\ \Big((a < b) \Rightarrow (\exists c \in \mathbb{Q}\ a < c < b)\Big)$.

   (Examen janvier 2010)

18. Dans cet exercice, g est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Q}$, i.e. $g : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$. On dit que :

g est bornée	ssi	$\exists b \in \mathbb{Q}\ \forall n \in \mathbb{N}\ \lvert g(n)\rvert \leq b$.
g est ultimement constante	ssi	$\exists c \in \mathbb{Q}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\ \big((n \geq n_0) \Rightarrow (g(n) = c)\big)$.
g est poly-convergente vers 0	ssi	$\exists d \in \mathbb{N}_0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}_0\ \big((n \geq n_0) \Rightarrow \lvert g(n)\rvert \leq \frac{1}{n^d}\big)$.

   Dans chacun des cas suivants, donnez (si possible) un exemple de fonction $g : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ telle que :
   (a) g soit bornée sans être ultimement constante.
   (b) g soit ultimement constante sans être bornée.
   (c) g soit ultimement constante sans être poly-convergente vers 0.
   (d) g soit poly-convergente vers 0 sans être ultimement constante.
   (e) g soit poly-convergente vers 0 sans être bornée.

   (Examen janvier 2010)

19. Décidez si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.
   (a) La formule suivante est une tautologie : $\forall a, b, c \in \mathbb{R}\ \ (a \neq 0) \Rightarrow (\exists x \in \mathbb{R}\ ax^2 + bx + c = 0)$.
   (b) La formule suivante est une tautologie : $\forall a, b \in \mathbb{Q}\ \ (a \neq 0) \Rightarrow (\exists x \in \mathbb{Q}\ ax + b = 0)$.

   (Examen août 2010)