Exercices Mathématiques Discrètes : Nombres entiers

1. Prouver que si $a \in \mathbb{N}_0$, alors (i) 1 divise a et (ii) a divise 0.
2. Soient $a,\ b \in \mathbb{N}_0$, prouver que si $a|b$ et $b|a$ alors $a = b$ ou $a = -b$.
3. Déterminer le quotient et le reste de 111 divisé par 11 ; 123 divisé par 7 ; 777 divisé par 21 ; 1434 divisé par 13 et 1025 divisé par 15.
4. Calculer :
$$7 \mod 5\ ;\ 789 \mod 5672\ ;\ 77 \mod 11\ ;\ 55 \mod 7\ ;\ 72 \mod 13.$$
5. Soient $a,\ b,\ n,\ m \in \mathbb{N}$ tels que $n,\ m \geq 2$ et $n|m$. Prouver que si $a \equiv_m b$ alors $a \equiv_n b$.
6. Soit $n \in \mathbb{N}$. Prouver que si n est impair alors $n^2 \equiv_8 1$.
7. En Belgique, un numéro de compte est toujours de la forme :
$$123 - 1234567 - 12.$$
Les trois premiers chiffres forment un code identifiant la banque, les sept chiffres suivants constituent réellement le numéro de compte du client et les deux derniers chiffres sont là pour vérifier les autres. Si le numéro de compte est un numéro valable, les deux derniers chiffres sont en fait le reste de la division par 97 du nombre composé des dix premiers chiffres (le code de la banque suivi du numéro de compte du client). Cette petite vérification, permet d'éviter un grand nombre d'erreurs de frappes, avant la validation un virement électronique. Vérifier que les numéros de compte suivants sont des numéros de compte valide :
– Médecins Sans Frontières : $000 - 0000060 - 60$.
– Amnesty International : $001 - 0520520 - 94$.
8. Soient $a \in \mathbb{N}$ et $d \in \mathbb{N}_0$. Ecrire un algorithme (en pseudo-code) qui calcule a div b et $a \mod b$. Prouver la correction et la terminaison de votre algorithme.
9. Soient a, b, c, $d \in \mathbb{Z}$ et $m \in \mathbb{N}_0$.
Prouver que si $a \equiv_m b$ et $c \equiv_m d$ alors $(a + c) \equiv_m (b + d)$ et $(ac) \equiv_m (bd)$.
10. Déduire de l'exercice précédent que :
$$\begin{aligned}(a+b) \mod m &= ((a \mod m) + (b \mod m)) \mod m\\ (a.b) \mod m &= ((a \mod m).(b \mod m)) \mod m\end{aligned}$$
11. Prouver que les deux égalités suivantes sont fausses :
$$\begin{aligned}(a+b) \mod m &= (a \mod m) + (b \mod m)\\ (a.b) \mod m &= (a \mod m).(b \mod m)\end{aligned}$$
12. Etant donnés a, $b \in \mathbb{Z}$, prouver *"l'identité de Bezout"*, c'est-à-dire prouver qu'il existe x, $y \in \mathbb{Z}$ tel que :
$$ax + by = \text{pgcd}(a, b).$$
(On admettra que tout sous-ensemble non vide de $\mathbb{N}$ a un plus petit élément.)

13. Soient $m,\ n \in \mathbb{Z}$ et p un nombre premier. Prouver que si $p|mn$ alors $p|m$ ou $p|n$. Ce résultat est-il toujours vrai si p n'est pas premier ?
14. Utiliser l'exercice précédent pour démontrer le théorème fondamental de l'arithmétique.
15. Soient a et $b \in \mathbb{N}$, prouver que $\text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(b, a \mod b)$. Utiliser ce résultat pour construire un algorithme (en pseudo-code) qui calcule $\text{pgcd}(a, b)$, a et b étant donnés. Prouver la correction et la terminaison de votre algorithme. Utiliser votre algorithme pour obtenir $pgcd(1000, 5040)$, $pgcd(123, 277)$ et $pgcd(1001, 2345)$.
16. Déterminer lesquels de ces nombres sont premiers : 21, 71, 111 et 143.
17. Décomposer les nombres suivants en nombres premiers : 88, 124, 289 et 402.
18. Ecrire un algorithme (en pseudo-code) qui teste si un nombre est premier. Prouver la correction et la terminaison de votre algorithme.
19. Calculer : $pgcd(15, 36)$, $ppcm(21, 49)$, $pgcd(121, 125)$, $ppcm(31, 81)$.
20. Prouver que le produit de trois entiers consécutifs est toujours divisible par 6.
21. Ecrire en notation binaire les nombres suivants : 7, 9, 11, 31 et 65.
22. Ecrire en notation hexadécimale les nombres suivants : 13, 31 et 65.
23. Convertir les entiers suivants de l'hexadécimal au décimal : $A0B1$ et $F0A02$.
24. Convertir les entiers suivants de l'hexadécimal au binaire : $ABBA$ et $FACE$.
25. Convertir les entiers suivants du binaire en hexadécimal : 1111 1011 et 1001 1101.
26. Etant donnés $n,\ b \in \mathbb{N}$ avec $b \geq 2$, écrire un algorithme (en pseudo-code) qui retourne la représentation de n en base b. Prouver la correction et la terminaison de votre algorithme.
27. Prouver qu'un nombre entier est divisible par 3 si et seulement si la somme de ses digits (en écriture décimale) est divisible par 3.
28. Trouver l'inverse de 5 modulo 11 ainsi que l'inverse de 3 modulo 7.
29. Prouver que $2^{340} \equiv_{11} 1$.
30. Décider si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifier votre réponse.
    (a) Soit $a \in \mathbb{Z}$, si $a|1$, alors $a = 1$.
    (b) Soient $a,\ b,\ p \in \mathbb{N}_0$ si $p|ab$, alors $p|a$ ou $p|b$.
    (c) $2^{300} \equiv_{11} 2$.

    (Examen janvier 2008)
31. Déterminer tous les entiers entre 1 et 20 vérifiant l'énoncé suivant :

    "Si n est pair, alors son successeur est premier."

    (Rappel : soit $n \in \mathbb{Z}$, le successeur de n est $n + 1$.)
    (Examen janvier 2008)
32. Pour chacune des équations suivantes, trouver tous les entiers qui en sont solutions :

$$x \equiv_{37} 0 \quad ; \quad x^2 + 2x + 1 \equiv_2 1 \quad ; \quad x^2 + 1 \equiv_5 0.$$

    (Examen janvier 2008)

33. Décider si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifiez votre réponse.
    (a) Soient $x,\ y \in \mathbb{Z}$, si $x \neq 0 \neq y$, alors $x.y \not\equiv_6 0$.
    (b) Soit p un nombre premier, le nombre $p^2 - p$ n'est jamais premier.

    (Examen juin 2008)
34. Décider si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.
    (a) Quels que soient $a,\ b \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}_0$: $(a+b) \mod n = (a \mod n) + (b \mod n)$.
    (b) Soient $p_1,\ p_2 \in \mathbb{N}$, si p_1 et p_2 sont premiers, alors $\text{pgcd}(p_1, p_2) = 1$.
    (c) Tout nombre naturel dont le carré est premier est un multiple de sept.
    (d) Si $p \in \mathbb{N}$ vérifie l'équation $x^2 + 2 \equiv_5 1$, alors p est premier.

    (Examen janvier 2009)
35. Décidez si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.
    (a) Soit p est premier, $a,\ b \in \mathbb{N}$, si $1 \leq a,\ b \leq p-1$, alors $ab \not\equiv_p 0$.
    (b) Soit $a,\ b,\ p \in \mathbb{N}$, si $1 \leq a,\ b \leq p-1$, alors $ab \not\equiv_p 0$.
    (c) Soit $a,\ p \in \mathbb{N}$, $a^2 \mod p = (a \mod p)^2$.

    (Examen janvier 2010)
36. Trouvez l'ensemble des $x \in \mathbb{Z}$ qui vérifient l'équation suivante : $x^2 \equiv_4 x^2(x+1)$. *(Examen janvier 2010)*
37. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit

    $$X_n = \{x \in \mathbb{R} \mid n \operatorname{mod} 2 \leq x \leq n \operatorname{mod} 4\} \quad ; \quad Y_n = \{x \in \mathbb{N} \mid (2|n) \Rightarrow (x \leq n)\}.$$

    (a) Calculez X_0, X_1, X_2, X_3 et X_{82}.
    (b) Calculez $\bigcup_{n\geq 0} X_n$.
    (c) Calculez $\bigcup_{n\geq 0} Y_n$ et $\bigcap_{n\geq 0} Y_n$.

    (Examen janvier 2010)
38. Décidez si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.
    (a) $\{b \in \mathbb{N} \mid \exists n \in \mathbb{N}\ \ b \equiv_7 4^n\} = \{1, 2, 4\}$.
    (b) $\{b \in \mathbb{N} \mid \exists n \in \mathbb{N}\ \ b = (4^n \mod 7)\} = \{1, 2, 4\}$.
    (c) $\forall n \in \mathbb{Z}\ |n| \leq n^2$.
    (d) $\forall a, b, c \in \mathbb{Z}$, $\forall m \in \mathbb{N}_0$, on a $(a + b \equiv_m a + c) \Rightarrow (b \equiv_m c)$.
    (e) $\forall a, b, c, m \in \mathbb{N}_0$, tous premiers, on a $(a \cdot b \equiv_m a \cdot c) \Rightarrow (b \equiv_m c)$.
    (f) $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists n \in \mathbb{N}\ \ n \leq x \leq n+1$.

    (Examen janvier 2011)
39. Un "truc" pour tester rapidement qu'un nombre naturel est divisible par 3 est de tester que la somme de ses digits dans son écriture en base 10 est divisible par 3. Par exemple, 123 est divisible par 3, car $1 + 2 + 3 = 6$ est divisible par 3. Le but de cet exercice est d'essayer de comprendre ce "truc".

(a) Quel que soit $k \in \mathbb{N}$, calculez le reste de la division de 10^k par 3.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$, on sait que l'on peut écrire n en base 10 (vous ne devez pas le prouver) ; c'est-à-dire que l'on peut écrire n sous la forme suivante :

$$n = \sum_{k=0}^{K} a_k 10^k$$

pour un certain $K \in \mathbb{N}$, avec $a_k \in \{0, 1, \ldots, 9\}$. Par exemple, $123 = 1.10^2 + 2.10^1 + 3.10^0$. En utilisant cette écriture, formalisez (à l'aide d'une implication) qu'une condition nécessaire pour qu'un nombre naturel soit divisible par 3 est que la somme de ses digits dans son écriture en base 10 soit divisible par 3.

(c) En utilisant le point (a), prouvez la propriété que vous avez formulée au point (b).

(d) Déterminez si la réciproque de la propriété que vous avez formulée au point (b) est vraie.

(e) Ce "truc" est-il vrai pour tester la divisibilité d'un naturel par un autre nombre que 3 ? Expliquez votre raisonnement !

(Examen janvier 2011)