Exercices Mathématiques Discrètes : Relations

Relations binaires

Rb1 Soient $A = \{0,1,2,3,4\}$ et $B = \{0,1,2,3\}$ deux ensembles. Ecrire explicitement les couples $(a,b) \in R$ où $(a,b) \in R$ si et seulement si :

$$a = b \ , \ a + b = 4 \ , \ a < b \ , \ pgcd(a,b) = 1 \ , \ ppcm(a,b) = 2 \ , \ a \text{ divise } b.$$

Rb2 Déterminer si les relations suivantes, définies sur un ensemble de personnes, sont réflexives, symétriques, antisymétriques et/ou transitives.

(a) $(a,b) \in R_1$ ssi a est plus grand que b.

(b) $(a,b) \in R_2$ ssi a et b sont nés le même jour.

(c) $(a,b) \in R_3$ ssi a a le même prénom que b.

(d) $(a,b) \in R_4$ ssi a et b ont un grand-parent commun.

Rb3 Déterminer si les relations suivantes, définies sur $\mathbb{R}$, sont réflexives, symétriques, antisymétriques et/ou transitives.

(a) $(a,b) \in R_1$ ssi $a + b = 0$.

(b) $(a,b) \in R_2$ ssi $a - b \in \mathbb{Q}$.

(c) $(a,b) \in R_3$ ssi $a \cdot b \geq 0$.

(d) $(a,b) \in R_4$ ssi $(a = 1) \vee (b = 1)$.

Rb4 Déterminer si les relations suivantes, définies sur $\mathbb{Z}$, sont réflexives, symétriques, antisymétriques et/ou transitives.

(a) $(a,b) \in R_1$ ssi $a = b^2$.

(b) $(a,b) \in R_2$ ssi $a \equiv_7 b$.

(c) $(a,b) \in R_3$ ssi $a + 1 = b$.

(d) $(a,b) \in R_4$ ssi $a \cdot b = 0$.

Rb5 Soit $A = \{1,2,3,4,5\}$ un ensemble et $R = \{(1,2),(2,3),(3,4),(4,5),(5,1)\}$ une relation sur A. Calculer R^2, R^3, R^4 et R^5. En déduire R^n, pour $n \geq 1$. Représenter R, R^2 par un graphe et R^3 par une matrice.

Rb6 Prouver que si R est une relation réflexive (resp. symétrique), alors R^n $(n \geq 1)$ est également réflexive (resp. symétrique).

Rb7 Soit A un ensemble et $R \subseteq A^2$ une relation binaire sur A. On dit que R est *irréflexive* si et seulement si pour tout élément $a \in A$, a n'est pas en relation avec lui-même.

(a) Donner un exemple de relation irréflexive sur $\mathbb{Z}$.

(b) Toute relation non réflexive est-elle irréflexive ? Justifier.

(c) Si R est irréflexive, R^{-1} est-elle irréflexive ? Justifier.

(d) Si R est irréflexive, R^n est-elle irréflexive quel que soit $n \geq 1$? Justifier.

(Examen juin 2008)

Rb8 Soit $2^{\mathbb{Z}}$ l'ensemble des parties de $\mathbb{Z}$ et R_1 la relation binaire définie par :

$$R_1 = \{(X, Y) \in 2^{\mathbb{Z}} \times 2^{\mathbb{Z}} \mid \text{ il existe } f : X \to Y \text{ injective}\}.$$

(a) Soit $X_1 = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \equiv_3 1\}$, trouvez $Y_1 \in 2^{\mathbb{Z}}$ tel que $Y_1 \neq X_1$ et $(Y_1, X_1) \in R_1$.

(b) Soit $X_2 = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \equiv_5 2\}$, trouvez $Y_2 \in 2^{\mathbb{Z}}$ tel que $Y_2 \neq X_2$ et $(X_2, Y_2) \in R_1$.

(c) La relation R_1 est-elle (i) réflexive ? (ii) transitive ? (iii) symétrique ? (iv) anti-symétrique ?

(Examen juin 2010)

Relations fonctionnelles

Rf1 Parmi les relations suivantes, lesquelles sont fonctionnelles ?

(a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = |x|\}$.

(b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = |y|\}$.

(c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \cdot y = 1\}$.

(d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x + 2y = 7\}$.

Rf2 Donner un exemple de relation fonctionnelle sur $\mathbb{N}$ qui est réflexive.

Rf3 Donner un exemple de relation fonctionnelle sur $\mathbb{N}$ qui est symétrique.

Relations d'équivalence

Re1 Parmi les relations suivantes sur $\{1, 2, 3\}$, lesquelles sont des relations d'équivalence ?

(a) $R_1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$.

(b) $R_2 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1)\}$.

(c) $R_3 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2)\}$.

(d) $R_4 = \{(1, 1), (3, 3), (1, 3), (3, 1)\}$.

(e) $R_5 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2), (1, 3), (3, 1)\}$.

Re2 Parmi les relations binaires sur un ensemble de personnes de l'exercice **Rb2**, lesquelles sont des relations d'équivalence ?

Re3 Parmi les relations binaires sur $\mathbb{R}$ de l'exercice **Rb3**, lesquelles sont des relations d'équivalence ?

Re4 Parmi les relations binaires sur $\mathbb{Z}$ de l'exercice **Rb4**, lesquelles sont des relations d'équivalence ?

Re5 Décrire la partition engendrée par la relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$ définie par $R = \{(a, b) \mid a \equiv_5 b\}$.

Re6 Prouver que si R est une relation d'équivalence, c'est aussi le cas de R^{-1}.

Re7 *Représentation des rationnels.* Pour éviter de représenter le rationnel $\frac{1}{3}$ par $0.3333\ldots$, on peut l'encoder via le couple $(1,3)$. Cependant, cette représentation comporte un inconvénient. En effet, par exemple, les couples $(1,3)$ et $(2,6)$ représentent le même rationnel ($\frac{1}{3}=\frac{2}{6}$). Donner une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}_0$ qui permet de régler ce problème. Que représente alors le quotient de $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}_0$ par cette relation d'équivalence ?

Re8 Soit $A=\mathbb{Z}^2$ et R la relation binaire sur $\mathbb{Z}^2$ définie par :

$$R=\{((a_1,b_1),(a_2,b_2)) \mid a_1+b_1=a_2+b_2\}.$$

(a) Prouver que R est une relation d'équivalence.

(b) Représenter la classe d'équivalence de $(1,1)$.

(c) Calculer le quotient de $\mathbb{Z}^2$ par R.

Re9 Soit $A=\mathbb{R}^2$ et R la relation binaire sur $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$R=\{((x_1,y_1),(x_2,y_2)) \mid x_1\cdot y_1=x_2\cdot y_2\}.$$

(a) Prouver que R est une relation d'équivalence.

(b) Représenter la classe d'équivalence de $(0,0)$.

(c) Représenter la classe d'équivalence de $(1,1)$.

(d) Calculer le quotient de $\mathbb{R}^2$ par R.

Re10 Soit $A=\mathbb{R}[x]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels, défini par :

$$\mathbb{R}[x]=\{a_nx^n+\cdots+a_0 \mid n\in\mathbb{N} \text{ et } a_i\in\mathbb{R} \text{ pour } 0\leq i\leq n\}.$$

(a) On considère la relation binaire R_1 sur $\mathbb{R}[x]$ définie par :

$$R_1=\{(p_1,p_2) \mid p_1(0)=p_2(0)\}.$$

i. Prouver que R_1 est une relation d'équivalence.

ii. Calculer le quotient de $\mathbb{R}[x]$ par R_1.

(b) On considère la relation binaire R_2 sur $\mathbb{R}[x]$ définie par :

$$R_2=\{(p_1,p_2) \mid p_1(i)=p_2(i),\ \text{où } i^2=-1\}.$$

i. Prouver que R_2 est une relation d'équivalence.

ii. Calculer le quotient de $\mathbb{R}[x]$ par R_2.

Re11 On considère la relation binaire $R_1\subseteq\mathbb{Z}^2$ définie par $(a,b)\in R_1$ si et seulement si $a^2=b^2$.

(a) Prouver que R_1 est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$.

(b) Calculer la classe d'équivalence de 0 pour R_1.

(c) Calculer la classe d'équivalence de 2 pour R_1.

(d) Calculer le quotient de $\mathbb{Z}$ par R_1.

(Examen juin 2009)

Re12 La relation $R_2 = \{(X,Y) \mid X,\, Y \subseteq \mathbb{N} \text{ et } X \cap Y \neq \emptyset\}$ est-elle une relation d'équivalence sur les parties de $\mathbb{N}$? *(Examen août 2009)*

Re13 Soit $F = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$. Pour tout $f, g \in F$, on définit la relation binaire $\sim$ sur F de la façon suivante :

$$f \sim g \quad \Leftrightarrow \quad \exists A \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R} \quad (|x| > A \Rightarrow f(x) = g(x))\,.$$

(a) Donnez deux fonctions $f, g \in F$ telles que $f \neq g$ et $f \sim g$.

(b) La relation $\sim$ est-elle une relation d'équivalence sur F ?

(Examen juin 2010)

Re14 Décidez si l'affirmation suivante est vraie ou fausse. *(Examen août 2010)*
La relation binaire $R \subseteq \mathbb{Z}^2$ définie par $R_1 = \{(a,b) \in \mathbb{Z}^2$ tel qu'il existe p premier où $p|a$ et $p|b\}$ est une relation d'équivalence.

Re15 Soit S l'ensemble des fonctions de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$, i.e. $S = \{f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}\}$. Et $R_2 \subseteq S^2$ la relation binaire définie par :

$$(f,g) \in R_2 \quad \text{si et seulement si} \quad \{x \in \mathbb{Z} \mid f(x) \neq g(x)\} \text{ est fini.}$$

(a) Donnez deux fonctions $f \neq g \in S$ telles que $(f,g) \in R_2$.

(b) Prouvez que R_2 est une relation d'équivalence sur S.

(c) Soit f_0 la fonction définie par $f_0(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{Z}$. On note $[f_0]$ la classe d'équivalence de f_0 pour R_2. Prouvez qu'il existe une fonction injective $F : \mathbb{Z} \to [f_0]$.

(Examen août 2010)

Relations d'ordre

Ro1 Parmi les relations suivantes sur $\{1,2,3\}$, lesquelles sont des relations d'ordre ?

(a) $R_1 = \{(1,1),(2,2),(3,3)\}$.

(b) $R_2 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(1,3)\}$.

(c) $R_3 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,3)\}$.

(d) $R_4 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,3),(1,3)\}$.

(e) $R_5 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1)\}$.

Ro2 Soit (A,R) est un ensemble ordonné, prouver que (A,R^{-1}) est un ensemble ordonné.

Ro3 Trouver deux éléments comparables et deux éléments incomparables dans les deux ensembles partiellement ordonnés ci-dessous :

$$(2^{\{0,1,2\}}, \subseteq) \quad ; \quad (\{1,2,4,6,8\}, |).$$

Ro4 Soit R une relation binaire sur $\mathbb{N}^2$ définie par :

$$(a_1,b_1)R(a_2,b_2) \quad \text{si et seulement si} \quad (a_1 \leq a_2) \wedge (b_1 \leq b_2).$$

Prouver que R est un relation d'ordre sur $\mathbb{N}^2$. Cette relation d'ordre est-elle totale ? Justifier. Représenter l'ensemble des couples $(a,b) \in \mathbb{N}^2$ tels que $(a,b)R(3,4)$, ainsi que l'ensemble des couples $(a,b) \in \mathbb{N}^2$ tels que $(3,4)R(a,b)$.

Ro5 A chaque naturel $n \in \mathbb{N}$, on peut associer son écriture en base 2 (par exemple $5 = (101)_2$). On suppose $0 < 1$, classer selon l'ordre lexicographique les éléments suivants :

$$0,\ 01,\ 101,\ 1101,\ 1011,\ 1001,\ 1000,\ 1010.$$

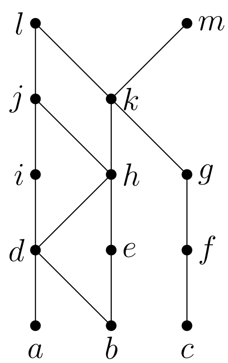
Associer à chaque élément ci-dessus le naturel qu'il représente en base 2. Comparer l'ordre naturel sur $\mathbb{N}$ et l'ordre lexicographique sur les représentations en base 2 des naturels.

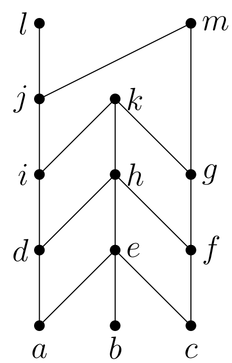
Ro6 Tracer les diagrammes de Hasse des ensembles ordonnés ci-dessous :

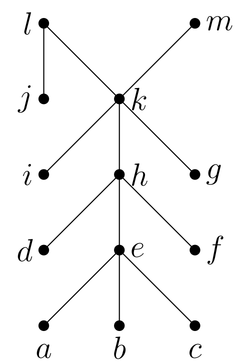
$$(\{1,2,3,4,5,6\},|)\ ;\ (\{2,3,5,7,11\},|)\ ;\ (\{1,2,4,8,16\},|)\ ;\ (\{1,3,5,7,15,30,35\},|).$$

Ro7 Répondre aux questions suivantes pour chacun des ordres partiels représentés par les diagrammes ci-dessous :

1. Trouver les éléments maximaux.
2. Trouver les éléments minimaux.
3. Existe-t-il un maximum ?
4. Existe-t-il un minimum ?
5. Trouver les bornes sup. de $\{a, b, c\}$.
6. Trouver le supremum de $\{a, b, c\}$.
7. Trouver les bornes inf. de $\{f, g, h\}$.
8. Trouver l'infimum de $\{f, g, h\}$.
9. Trouver les bornes sup. de $\{f, g, h\}$.
10. Trouver le supremum de $\{f, g, h\}$.



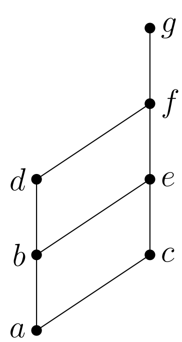


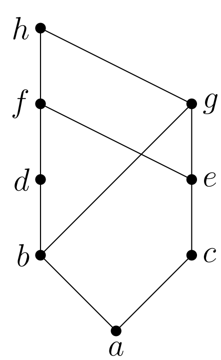


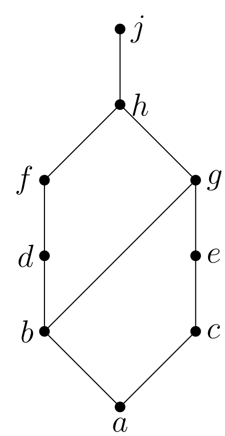
Ro8 Donner un ensemble ordonné avec un maximum mais pas de minimum.

Ro9 Déterminer si $(\mathbb{N}_0, |)$ a un maximum ? un minimum ?

Ro10 Déterminer si les diagrammes de Hasse ci-dessous représentent un treillis.







Ro11 Déterminer si les ensembles ordonnés suivants sont des treillis :

$$(\{1, 3, 6, 9, 12\}, |)\ ;\ (\{1, 5, 25, 125\}, |)\ ;\ (\mathbb{Z}, \leq).$$

Ro12 Prouver que tout sous-ensemble fini non vide d'un treillis a un infimum et un supremum.

Ro13 Prouver que si (A, R) est un treillis, alors (A, R^{-1}) est aussi un treillis.

Ro14 Prouver que tout ordre total est un treillis.

Ro15 Prouver que tout treillis fini a un maximum et un minimum.

Ro16 Donner un exemple de treillis infini sans maximum, ni minimum.

Ro17 Donner un exemple de treillis infini avec un maximum et sans minimum.

Ro18 Donner un exemple de treillis infini sans maximum mais un minimum.

Ro19 Donner un exemple de treillis infini avec un maximum et un minimum.

Ro20 Vérifier que $\mathbb{N}^2$ muni de l'ordre lexicographique forme un ensemble bien ordonné.

Ro21 Trouver un ordre total compatible avec l'ordre de division sur $\{1, 2, 3, 6, 8, 12, 24, 36\}$.

Ro22 Trouver un ordre total compatible avec les ordres donnés par les diagrammes de Hasse de la question **Ro**10.

Ro23 Soit A un ensemble et $\preccurlyeq \subseteq A^2$ une relation binaire sur A. On dit que $\preccurlyeq$ est un *pré-ordre* sur A si elle est réflexive et transitive.

(a) Donner un exemple de pré-ordre qui n'est pas un ordre.

(b) Soit A un ensemble et $\preccurlyeq$ un pré-ordre sur A. Prouver que la relation binaire $\sim$ définie ci-dessous est une relation d'équivalence sur A :

$$\sim = \{(a, b) \mid (a \preccurlyeq b) \wedge (b \preccurlyeq a)\}.$$

(c) On définit la relation binaire $\leq$ sur le quotient de A par $\sim$ de la façon suivante :

$$[a] \leq [b] \qquad \text{si et seulement si} \qquad a \preccurlyeq b.$$

Prouver que $\leq$ est bien définie (i.e. $\forall x \in [a],\ \forall y \in [b]\ ([a] \leq [b]) \Rightarrow (x \preccurlyeq y)$).

(d) Prouver que $\leq$ est une relation d'ordre sur le quotient de A par $\sim$.

Ro24 Représenter le diagramme de Hasse d'un ensemble ordonné fini qui possède un minimum mais pas de maximum et qui possède trois éléments $a_1,\ a_2,\ a_3$ tels que $\sup\{a_1, a_2, a_3\}$ n'existe pas. Un tel ensemble peut-il être un treillis ? *(Examen juin 2008)*

Ro25 Soit $C = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}\}$ et R la relation binaire définie par :

$$R = \{(f, g) \in C \times C \mid \forall x \in \mathbb{R}\ f(x) \leq g(x)\}.$$

(a) Donner deux fonctions $f,\ g \in C$ telles que $(f, g) \in R$.

(b) Prouver que R est une relation d'ordre sur C.

(c) R est-elle une relation d'ordre totale ?

(Examen juin 2008)

Ro26 Tracer le diagramme de Hasse de $(2^{\{2,3,5\}}, \subseteq)$. *(Examen juin 2009)*

Ro27 Soit $C = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}\}$ et R_2 la relation binaire définie par :

$$R_2 = \{(f, g) \in C \times C \mid \forall x \in \mathbb{Z}\ f(x) \leq g(x)\}.$$

(a) Donner deux fonctions $f,\ g \in C$ telles que $(f, g) \in R_2$.

(b) R_2 est-elle une relation d'ordre sur C ?

(Examen juin 2009)

Ro28 Déterminer si la relation binaire $R_3 \subseteq \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2$ définie ci-dessous est une relation d'ordre :

$$(a_1, b_1)R_3(a_2, b_2) \quad \text{si et seulement si} \quad (a_1 \leq a_2) \text{ ou } (b_1 \leq b_2).$$

(Examen juin 2009)

Ro29 Décider si l'affirmation suivante est vraie ou fausse. Justifier.
Soit A un ensemble, un pré-ordre sur A est une relation binaire réflexive et transitive.
Tout pré-ordre sur A est aussi un ordre sur A. *(Examen juin 2009)*

Ro30 La relation $R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 \leq y^2\}$ définit-elle un ordre sur $\mathbb{R}$?
(Examen août 2009)

Ro31 Soit $E = \{0, 1\}^3$ et R_3 une relation binaire sur E définie par :

$$(a_1, b_1, c_1)R_3(a_2, b_2, c_2) \;\text{ si et seulement si }\; a_1 \leq a_2 \text{ et } b_1 \leq b_2 \text{ et } c_1 \leq c_2.$$

(a) Prouver que R_3 est un ordre sur E et tracer le diagramme de Hasse de (E, R_3).

(b) L'ensemble ordonné (E, R_3) possède-t-il un maximum ?

(Examen août 2009)

Ro32 Si $X \neq \emptyset$ est un ensemble fini, on note 2^X l'ensemble des parties de X. Etant donné $A \in 2^X$, on note $|A|$ le nombre d'éléments de A. Soit $R_X \subseteq 2^X \times 2^X$ la relation binaire définie par :

$$(A, B) \in R_X \;\text{ si et seulement si }\; |A| \leq |B|, \;\text{ où } A, B \in 2^X.$$

Décidez si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

(a) Quel que soit $X \neq \emptyset$ ensemble fini, la relation R_X est une relation d'ordre.

(b) Quel que soit $X \neq \emptyset$ ensemble fini, la relation R_X **n**'est **pas** une relation d'ordre.

(c) Quel que soit $X \neq \emptyset$ ensemble fini, la relation R_X **n**'est **pas** une relation d'équivalence.

(Examen juin 2010)

Ro33 Soit l'ensemble $E = \{0, 1, 2\}$, on munit E^2 de la relation binaire R_2 définie par :

$$R_2 = \left\{ \big((a_1, b_1), (a_2, b_2)\big) \in E^2 \times E^2 \mid a_1 \leq a_2 \text{ et } b_1 \leq b_2 \right\}.$$

(a) Prouvez que la relation R_2 est une relation d'ordre sur E^2.

(b) Tracez le diagramme de Hasse de (E^2, R_2).

(Examen juin 2010)

Ro34 Soit $\Sigma = \{a, b\}$. Un mot fini de longueur n sur Σ est une fonction $w : \{0, \dots, n-1\} \to \Sigma$. Dans ce cas, on note $Dom(w)$ l'ensemble $\{0, \dots, n-1\}$ et Σ^* l'ensemble des mots finis sur Σ. Un mot infini sur Σ est une fonction $w : \mathbb{N} \to \Sigma$. Dans ce cas, on note $Dom(w)$ l'ensemble $\mathbb{N}$ et Σ^ω l'ensemble des mots infinis sur Σ. On dira qu'un mot w_1 (fini ou infini) est un *sous-mot* d'un mot w_2 (fini ou infini) si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

- $Dom(w_1) \subseteq Dom(w_2)$;
- il existe $F : Dom(w_1) \to Dom(w_2)$ telle que F est strictement croissante [1] et $w_1(n) = w_2(F(n))$, pour tout $n \in Dom(w_1)$.

On note $w_1 \preceq w_2$ si w_1 est un sous-mot de w_2.

(a) On considère les mots finis $w_1 : \{0, \dots, 3\} \to \Sigma$ et $w_2 : \{0, \dots, 5\} \to \Sigma$ définis ci-dessous.

$$w_1(n) = \begin{cases} a & \text{si } n = 0, 1 \\ b & \text{si } n = 2, 3 \end{cases} \quad ; \quad w_2(n) = \begin{cases} a & \text{si } n = 0, 2, 4 \\ b & \text{si } n = 1, 3, 5 \end{cases}$$

Le mot w_1 peut être représenté par la suite $w_1(0) \dots w_1(3) = aabb$ et le mot w_2 par la suite $w_2(0) \dots w_2(5) = ababab$. Montrer que w_1 est un sous-mot de w_2 (i.e., $w_1 \preceq w_2$).

(b) Donner (si possible) un mot fini $w_1 \in \Sigma^*$ et un mot infini $w_2 \in \Sigma^\omega$ tels que $w_1 \preceq w_2$.

(c) Donner (si possible) un mot infini $w_1 \in \Sigma^\omega$ et un mot fini $w_2 \in \Sigma^*$ tels que $w_1 \preceq w_2$.

(d) La relation $\preceq$ est-elle un ordre sur Σ^* ?
- Si oui, s'agit-il d'un ordre total ?
- Si non, trouver un sous-ensemble infini de Σ^* ordonné par $\preceq$.

(e) La relation $\preceq$ est-elle un ordre sur Σ^ω ?
- Si oui, s'agit-il d'un ordre total ?
- Si non, trouver un sous-ensemble infini de Σ^ω ordonné par $\preceq$.

(f) On note a^ω (resp. b^ω) le mot infini $w : \mathbb{N} \to \Sigma$ tel que $w(n) = a$ (resp. b) pour tout $n \in \mathbb{N}$. On note $(ab)^\omega$ le mot infini $w : \mathbb{N} \to \Sigma$ tel que $w(n) = a$ si n est pair et $w(n) = b$ si n est impair. La relation $\preceq$ est-elle un ordre sur l'ensemble $X = \{a, b, a^\omega, b^\omega, (ab)^\omega\}$?
- Si oui, tracer le diagramme de Hasse associé à $(X, \preceq)$.
- Si non, donner un sous-ensemble de X, contenant 3 éléments, sur lequel $\preceq$ est un ordre.

On note $w_1 \sim w_2$ si et seulement si $w_1 \preceq w_2$ et $w_2 \preceq w_1$.

(g) La relation $\sim$ est-elle une relation d'équivalence sur Σ^* ?
- Si oui, calculer la classe d'équivalence du mot *aabb*.
- Si non, donner un sous-ensemble infini de Σ^* sur lequel $\sim$ est une relation d'équivalence.

(h) La relation $\sim$ est-elle une relation d'équivalence sur Σ^ω ?

1. On dit qu'une fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante si et seulement si $\forall x, y \in \mathbb{N} \;\; x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$.

- Si oui, déterminer si la classe d'équivalence du mot a^ω est finie ou infinie.
- Si non, donner un sous-ensemble infini de Σ^ω sur lequel $\sim$ est une relation d'équivalence.

(Examen juin 2011)

Ro35 On fixe $\mathcal{U} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ (l'ensemble des sous-ensembles de $\mathbb{N}$) comme espace universel (aussi appelé espace ambiant). On définit les quatre ensembles suivants :

$$\mathcal{A} = \{X \subseteq \mathbb{N} \text{ tq } \exists n \in \mathbb{N}\ |X| \leq n\} \quad , \quad \mathcal{B} = \mathcal{A}^c \quad ,$$
$$\mathcal{C} = \{X \subseteq \mathbb{N} \text{ tq } X^c \in \mathcal{A}\} \quad , \quad \mathcal{D} = \{\{x \in \mathbb{N} \text{ tq } \ 0 \leq x \leq n\} \text{ tq } n \in \mathbb{N}\}.$$

On définit également deux relations binaires $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2 \subseteq \mathcal{U} \times \mathcal{U}$:

$$X\mathcal{R}_1Y \ \text{ ssi } \ \text{il existe une injection } f : X \to Y,$$
$$X\mathcal{R}_2Y \ \text{ ssi } \ \text{il existe une bijection } f : X \to Y.$$

Déterminez si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

(a) L'ensemble $\mathcal{B}$ est inclus à l'ensemble $\mathcal{C}$.

(b) L'ensemble $\mathcal{C}$ est inclus à l'ensemble $\mathcal{B}$.

(c) La formule $\exists x \in \mathbb{N}\ \forall X \in \mathcal{C}\ x \in X$ est une tautologie.

(d) Il existe une fonction injective $F_1 : \mathbb{N} \to \mathcal{A}$.

(e) Il existe une fonction injective $F_2 : \mathbb{N} \to \mathcal{B}$.

(f) $\mathcal{R}_1$ est une relation réflexive et transitive sur $\mathcal{U}$.

(g) $\mathcal{R}_2$ est une relation réflexive et transitive sur $\mathcal{U}$.

(h) $\mathcal{R}_1$ est une relation d'équivalence sur $\mathcal{A}$.

(i) $\mathcal{R}_2$ est une relation d'équivalence sur $\mathcal{B}$.

(j) $\mathcal{R}_1$ est une relation d'ordre sur $\mathcal{D}$.

(k) $\mathcal{R}_2$ est une relation d'ordre sur $\mathcal{A}$.

(l) $\mathcal{R}_2$ est une relation d'ordre sur $\mathcal{B}$.

(Examen août 2011)