Exercices Mathématiques Discrètes : Théorie naïve des ensembles

1. Montrer les égalités suivantes.

$$A \cup \emptyset = A \qquad A \cap \emptyset = \emptyset$$
$$A \cap \mathcal{U} = A \qquad A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$$

$$A \cup A = A \qquad A \cup B = B \cup A$$
$$A \cap A = A \qquad A \cap B = B \cap A$$
$$\overline{\overline{A}} = A$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \qquad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \qquad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B} \qquad A \cap \bar{A} = \emptyset$$
$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B} \qquad A \cup \bar{A} = \mathcal{U}$$

2. Déteminer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses :

$$1 \in \mathbb{N}\ ; \quad \{1\} \in \mathbb{N}\ ; \quad 1 \subseteq \mathbb{N}\ ; \quad \{1\} \subseteq \mathbb{N}\ ; \quad \emptyset \in \mathbb{N}\ ; \quad \emptyset \subseteq \mathbb{N}\ ;$$
$$1 \in 2^{\mathbb{N}}\ ; \quad \{1\} \in 2^{\mathbb{N}}\ ; \quad 1 \subseteq 2^{\mathbb{N}}\ ; \quad \{1\} \subseteq 2^{\mathbb{N}}\ ; \quad \emptyset \in 2^{\mathbb{N}}\ ; \quad \emptyset \subseteq 2^{\mathbb{N}}\ ;$$
$$\emptyset \in \emptyset\ ; \quad \emptyset \subseteq \emptyset\ ; \quad \emptyset \in \{\emptyset\}\ ; \quad \emptyset \subseteq \{\emptyset\}; \quad A \in 2^A; \quad A \subseteq 2^A.$$

3. Donner en extension les ensembles suivants :

$$\{x \in \mathbb{R} \ \mid x^2 + 2x + 1 = 0\}\ ;\ \{x \in \mathbb{C} \ \mid x^2 + 1 = 0\}\ ;\ \{x \in \mathbb{Q} \ \mid x^2 - 2 = 0\}.$$

4. Déterminer si les paires d'ensembles suivants sont égaux. Justifier.
   (a) $\{1, 2, 3\}$ et $\{1, 2, 2, 3, 1\}$.
   (b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2x + 1 = 0\}$ et $\{1\}$.
   (c) $\{n \in \mathbb{N} \mid n$ est premier$\}$ et $2\mathbb{N}$.
5. Considérez l'algorithme (ou programme) ci-dessous :

Entrée : $x \in \mathbb{R}$

Tant que $1 = 1$ **faire**
  Si $x = 0$ **alors EXIT**
    Sinon $x := x - 1$
fin faire

Quelle(s) valeur(s) de x assure(nt) la terminaison de l'algorithme ? Justifier.

6. Soient A et B deux ensembles. Etablir les relations d'inclusion entre :
   (a) $2^A \cup 2^B$ et $2^{A \cup B}$,
   (b) $2^A \cap 2^B$ et $2^{A \cap B}$.
7. On pose : $A = \{1, 2\}$, $B = \{3, 4, 5\}$ et $C = \{7\}$. Calculer : $A \times B$, $2^{A \times C}$, $2^A \times C$.

8. Soient A et B deux ensembles, prouver les équivalences suivantes :
$$A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap \bar{B} = \emptyset \qquad ; \qquad A \subseteq B \Leftrightarrow \bar{B} \subseteq \bar{A}.$$
9. On pose $A_i = \{0, i\}$ où $i \in \mathbb{N}$. Calculer :
$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \quad \text{et} \quad \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i.$$
10. On pose $A_i =]0, \frac{1}{i}[$ où $i \in \mathbb{N}_0$ et $]0, \frac{1}{i}[= \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \frac{1}{i}\}$. Calculer :
$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i.$$
11. On pose $A_i =]-\frac{1}{i}, \frac{1}{i}[$ où $i \in \mathbb{N}_0$ et $]-\frac{1}{i}, \frac{1}{i}[= \{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{i} < x < \frac{1}{i}\}$. Calculer :
$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i.$$
(Que peut-on déduire de l'intersection infinie d'intervalles ouverts ?)
12. On pose $A_i = [0, \frac{i-1}{i}]$ où $i \in \mathbb{N}_0$ et $[0, \frac{i-1}{i}] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq \frac{i-1}{i}\}$. Calculer :
$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i.$$
(Que peut-on déduire de l'union infinie d'intervalles fermés ?)
13. Soit A un ensemble fini. Prouver que si $|A| = n$ (avec $n \in \mathbb{N}$) alors $|2^A| = 2^n$.
14. Soit A et B deux ensembles finis tels que $|A| = |B|$ et f une fonction de A vers B. Prouver que f est une bijection si et seulement si f est une injection si et seulement si f est une surjection.
15. Soit A un ensemble. On dit que A est dénombrable si A est en bijection avec $\mathbb{N}$.
   – Prouver que les ensembles $2\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_0$, $\mathbb{N}^2$ et $\mathbb{Z}$ sont dénombrables.
   – Prouver que l'ensemble $2^{\mathbb{N}}$ n'est pas dénombrable.
16. Décider si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifier votre réponse.
   (a) Soit A un ensemble, si $\emptyset \in A$ alors A est vide.
   (b) Soit A un ensemble, $A \subseteq \emptyset$ si et seulement si A est vide.
   (Examen janvier 2008)
17. Soit $A_i = \left]0, \frac{2i+1}{i}\right[= \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \frac{2i+1}{i}\right\}$, où $i \in \mathbb{N}_0$. Calculer $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ et $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$.
   (Examen janvier 2008)
18. Décider si l'affirmation suivante est vraie ou fausse. Justifier votre réponse.
   En posant $A_n = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq \frac{1}{n}\}$ (pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$), l'égalité suivante est vérifiée :
$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n = \emptyset.$$
   (Examen juin 2008)

19. Décider si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.
    (a) Si pour tout $i \geq 2$ on pose $A_i = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1 - \frac{1}{i}\}$ alors $\bigcup_{i \geq 2} A_i =]0, 1]$.
    (b) Si pour tout $k \in \mathbb{N}$ on pose $A_k = \{x \in \mathbb{N} \mid k \leq x \leq k^2+2k+1\}$ alors $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k = \mathbb{N}$.
    (c) L'ensemble $\{X \subseteq \mathbb{N}$ tel que $|X| = 1\}$ est dénombrable.
    (d) L'ensemble des parties de $2\mathbb{N} = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est dénombrable.

    (Examen janvier 2009)
20. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit l'ensemble A_n comme suit :
$$A_n = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid -1 - \left(\frac{-1}{2}\right)^n \leq x \leq 1 + \left(\frac{-1}{2}\right)^n \right\}.$$
    (a) Sur un même dessin, représentez A_0, A_1, A_2 et A_3.
    (b) Est-il vrai que $\forall n \in \mathbb{N}\ A_{n+1} \subseteq A_n$? Justifiez votre réponse.
    (c) Est-il vrai que $\forall n \in \mathbb{N}\ A_{n+2} \subseteq A_n$? Justifiez votre réponse.
    (d) Est-il vrai que $\forall n \in \mathbb{N}\ A_{2n+2} \subseteq A_{2n}$? Justifiez votre réponse.
    (e) Calculez $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ et $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

    (Examen août 2009)
21. L'ensemble $\{(a, b) \in \mathbb{N}^2 \mid a - b = 0\}$ est-il dénombrable ? Justifier votre réponse.
    (Examen août 2009)
22. Pour $i \in \mathbb{N}_0$, on définit
$$A_i = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid \frac{-1}{i} \leq x \leq \frac{1}{i} \right\}$$
    Calculez $\bigcup_{i \geq 1} A_i$ et $\bigcap_{i \geq 1} A_i$.
    (Examen janvier 2010)
23. Prouvez que l'ensemble $\mathbb{N} \times \{0, 1, 2\} = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{N}$ et $y \in \{0, 1, 2\}\}$ est dénombrable.
    (Examen janvier 2010)
24. Pour $n \in \mathbb{N}_0$, on définit $A_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$.
    (a) Représentez les ensembles A_1, A_2 et A_4.
    (b) Calculez $\bigcap_{n \geq 1} A_n$.
    (c) Est-il vrai que $\bigcup_{n \geq 1} A_n \subseteq \{z \in \mathbb{C}$ tq $|z| = 1\}$?
    (d) Est-il vrai que $\bigcup_{n \geq 1} A_n \supseteq \{z \in \mathbb{C}$ tq $|z| = 1\}$?

    (Examen août 2010)
25. Décidez si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.
    (a) $\displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left[0, 2 + \frac{(-1)^n}{2^n}\right] = [0, 1]$.
    (b) L'ensemble $\{n \in \mathbb{N} \mid n$ est premier $\Rightarrow n$ est pair$\}$ est fini.

    (Examen janvier 2011)

26. Trouvez (si possible) un exemple dans chacune des situations suivantes. Dans le cas où il est impossible de trouver un exemple, justifiez pourquoi.

   (a) Un ensemble $X \subseteq \mathbb{R}$ qui satisfait la formule suivante :

$$\big(\exists b \in \mathbb{R}\ \forall x \in X\ (x \leq b)\big)\ \wedge\ \big(\forall y \in X\ \exists z \in X\ (y < z)\big).$$

   (b) Une fonction $f : \{0,1\} \to \{5,7\}$ qui est injective sans être surjective.

   (c) Un ensemble *dénombrable* X de nombres réels tel que $X \subseteq [0,1]$.

   (d) Une fonction $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ qui est injective. ($\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \notin \mathbb{Q}\}$)

   (e) Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui satisfait la formule suivante :

$$\big(\forall x, y \in \mathbb{R}\ (x \leq y) \Rightarrow f(x) > f(y)\big) \wedge \big(\exists p \in \mathbb{R}_0\ \forall z \in \mathbb{R}\ f(z) = f(z+p)\big).$$

   (f) Une suite d'ensembles $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n \subseteq \mathbb{Q}$, qui satisfait la formule suivante :

$$\left(\forall k \in \mathbb{N} \bigcap_{n=0}^{k} X_n \neq \emptyset\right)\ \wedge\ \left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} X_n = \emptyset\right).$$

   (g) Une suite d'ensembles $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n \subseteq \mathbb{Q}$, qui satisfait la formule suivante :

$$\left(\forall k \in \mathbb{N} \bigcup_{n=0}^{k} X_n \neq \emptyset\right)\ \wedge\ \left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} X_n = \emptyset\right).$$

(Examen janvier 2011)