Mathématiques Discrètes : Janvier 2008

Justifier toutes vos réponses !
La qualité de la rédaction de vos arguments sera notée.

1. Décider si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifier votre réponse. *(Une réponse correcte non justifiée ne sera pas considérée)*
   (a) Soit A un ensemble, si $\emptyset \in A$ alors A est vide.
   (b) Soit A un ensemble, $A \subseteq \emptyset$ si et seulement si A est vide.
   (c) Soient A et B deux ensembles, on a $\mathcal{P}(A \cup B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$.
   (d) Soit A un ensemble non vide et $P(x_1, x_2)$ un prédicat de domaine A^2, la formule suivante est une tautologie :
   $$\forall x_1\ \exists x_2\ P(x_1, x_2)\ \Leftrightarrow\ \exists x_2\ \forall x_1\ P(x_1, x_2).$$
   (e) Soit A un ensemble non vide et $P(x_1, x_2)$ un prédicat de domaine A^2, la formule suivante est une tautologie :
   $$\exists x_1\ \forall x_2\ P(x_1, x_2)\ \Rightarrow\ \forall x_2\ \exists x_1\ P(x_1, x_2).$$
   (f) Soit $a \in \mathbb{Z}$, si $a|1$ alors $a = 1$.
   (g) Soient $a,\ b,\ p \in \mathbb{N}_0$ si $p|ab$ alors $p|a$ ou $p|b$.
   (h) $2^{300} \equiv_{11} 2$.
   (i) Si $\sin(x)$ a une unique racine alors tout nombre premier est impair.
   (j) L'ensemble $\{n \in \mathbb{Z} \mid n \equiv_3 5\}$ est dénombrable.

2. Déterminer tous les entiers entre 1 et 20 vérifiant l'énoncé suivant :
   "Si n est pair, alors son successeur est premier."
   (Rappel : soit $n \in \mathbb{Z}$, le successeur de n est $n + 1$.)

3. Pour chacune des équations suivantes, trouver tous les entiers qui en sont solutions :
   $$x \equiv_{37} 0 \quad ; \quad x^2 + 2x + 1 \equiv_2 1 \quad ; \quad x^2 + 1 \equiv_5 0.$$

4. Soit $A_i = \left(0, \frac{2i+1}{i}\right) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \frac{2i+1}{i}\right\}$, où $i \in \mathbb{N}_0$. Calculer $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ et $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$.

5. En utilisant un résultat du cours, donner un algorithme (en pseudo-code) qui, étant donnés $a,\ b \in \mathbb{N}$, calcule le pgcd(a, b).
   Utiliser votre algorithme pour obtenir le $pgcd(1000, 5040)$ (votre algorithme doit terminer sur cet exemple en moins de "cinq étapes").
   Prouver la correction et la terminaison de votre algorithme.

6. Prouver par induction que $n \leq n^2$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

7. Soit le shéma d'induction (B, R) où $B = \{aab, aba, baa\}$ et R contient les trois règles suivantes :

$$\begin{array}{rcl} u, v, w & \rightarrow & auavbw \\ u, v, w & \rightarrow & aubvaw \\ u, v, w & \rightarrow & buavaw \end{array}$$

   (a) Montrer comment le shéma permet d'engendrer le mot *aaabbabaabaa*.

   (b) Montrer que tous les mots engendrés par le shéma contiennent deux fois plus de a que de b. Plus formellement, si n_a (resp. n_b) représente le nombre de a (resp. b), il faut montrer que pour tout mot engendré par le shéma, on a $n_a = 2n_b$.

   (c) Ce shéma permet-il d'engendrer tous les mots non vide qui contiennent deux fois plus de a que de b ? Justifier votre réponse.

8. Etudier, en fonction du paramètre réel $\lambda \neq 1$, le comportement limite (i.e. $\lim_{n \to +\infty} x_n$) de la suite définie par la relation de récurence suivante :

$$x_{n+2} \;=\; (\lambda + 1)x_{n+1} - \lambda\, x_n,$$

   lorsque les conditions initiales sont données par $x_0 = 0$ et $x_1 = 1$.