Mathématiques Discrètes : Août 2008

Justifiez toutes vos réponses !
La qualité de la rédaction de vos arguments sera notée.

1. Décider si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifiez votre réponse.
   (Une réponse correcte non justifiée ne sera pas considérée)
   (a) La somme de deux nombres entiers consécutifs est toujours un nombre impair.
   (b) Soit $A_n = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \frac{1}{n+1}\}$ (pour $n \in \mathbb{N}$), $0 \in \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$.
   (c) Soient $x,\ y \in \mathbb{Z}$ tels que $x \not\equiv_3 0$ et $y \not\equiv_3 0$ alors $x.y \not\equiv_3 0$.
   (d) Tout nombre premier pair et strictement plus grand que trois est divisible par douze.
   (e) Toute relation d'ordre est une relation d'équivalence.

2. Prouver (par induction sur n) que le nombre de parties d'un ensemble à n éléments est 2^n.

3. Soit le shéma d'induction (B, R) où $B = \{aa, b\}$ et R contient les deux règles suivantes :

$$u, v \to auav \qquad ; \qquad u \to bu$$

   (a) Montrer comment le shéma permet d'engendrer le mot *bababaa*.
   (b) Montrer que tous les mots engendrés par le shéma contiennent un nombre pair de a.
   (c) Ce shéma permet-il d'engendrer tous les mots (non vides) contenant un nombre pair de a ? Justifier.

4. Soit $C = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}\}$, R_1 et R_2 les relations binaires définies par :

$$R_1 = \{(f, g) \in C^2 \mid \exists x \in \mathbb{R}\ f(x) \geq g(x)\}\ ;\ R_2 = \{(f, g) \in C^2 \mid \forall x \in \mathbb{R}\ (x \geq 0) \Rightarrow (f(x) \leq g(x))\}$$

   (a) Donner deux fonctions $f,\ g \in C$ telles que $(f, g) \in R_1$.
   (b) Donner deux fonctions $f,\ g \in C$ telles que $(f, g) \in R_2$.
   (c) La relation R_1 est-elle une relation d'ordre sur C ? Justifier votre réponse.
   (d) La relation R_2 est-elle une relation d'équivalence sur C ? Justifier votre réponse.

5. On considère deux pièces de monnaie truquées, la première a deux fois plus de chance de tomber sur pile que sur face et la seconde a trois fois plus de chance de tomber sur face que sur pile. Soit l'expérience aléatoire où les deux pièces de monnaie sont lancées en même temps.
   (a) Décrire l'univers Ω de cette expérience aléatoire ?
   (b) Déterminer la probabilité que les deux pièces tombent sur la face pile.

6. Soit S_3 l'ensemble des permutations de $\{1, 2, 3\}$ et R la relation binaire sur $(S_3)^2$ définie par :

$$R = \{(p_1, p_2) \in S_3 \times S_3 \mid p_1(2) \equiv_2 p_2(2)\}.$$

   (a) Prouver que R est une relation d'équivalence.
   (b) Décrire la partition de S_3 induite par les classes d'équivalence de R.
   (c) Déterminer si l'une des classes d'équivalence de R est un sous-groupe de S_3.