Mathématiques Discrètes : Août 2009

Justifiez toutes vos réponses !
La qualité de la rédaction de vos arguments sera notée.

1. Prouvez l'égalité suivante par induction sur $n \in \mathbb{N}_0$:
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} 2^n & 2^n \\ 2^n & 2^n \end{pmatrix}.$$

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit l'ensemble A_n comme suit :
$$A_n = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid -1 - \left(\frac{-1}{2}\right)^n \leq x \leq 1 + \left(\frac{-1}{2}\right)^n \right\}.$$
   (a) Sur un même dessin, représentez A_0, A_1, A_2 et A_3.
   (b) Est-il vrai que $\forall n \in \mathbb{N}\ A_{n+1} \subseteq A_n$? Justifiez votre réponse.
   (c) Est-il vrai que $\forall n \in \mathbb{N}\ A_{n+2} \subseteq A_n$? Justifiez votre réponse.
   (d) Est-il vrai que $\forall n \in \mathbb{N}\ A_{2n+2} \subseteq A_{2n}$? Justifiez votre réponse.
   (e) Calculez $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ et $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$.
3. La relation $R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 \leq y^2\}$ définit-elle un ordre sur $\mathbb{R}$?
4. Déterminez si les formules suivantes sont des tautologies. Justifiez votre réponse.
   (a) $\forall x \in \mathbb{Q}\ \forall y \in \mathbb{Q}\ \big[(x < y) \Rightarrow \exists z \in \mathbb{Q}\ (x < z < y)\big]$.
   (b) $\forall a \in \mathbb{Z}\ \forall b \in \mathbb{Z}\ \big[(a < b) \Rightarrow \exists c \in \mathbb{Z}\ (a < c < b)\big]$.
   (c) $\forall a \in \mathbb{R}\ \forall b \in \mathbb{R}\ \forall c \in \mathbb{R}\ \Big(\big(\exists x \in \mathbb{R}\ ax^2 + bx + c = 0\big) \Leftrightarrow \big(b^2 - 4ac \geq 0\big)\Big)$
5. L'ensemble $G_1 = \{p \in S_5 \mid p(4) = 5 \text{ et } p(5) = 4\}$ est-il un sous-groupe de S_5 ?
6. La relation $R_2 = \{(X, Y) \mid X, Y \subseteq \mathbb{N} \text{ et } X \cap Y \neq \emptyset\}$ est-elle une relation d'équivalence sur les parties de $\mathbb{N}$?
7. Un joueur se rend au casino et décide de jouer à la roulette. Pour simplifier les choses, on suppose que la roulette est numérotée de 1 à 36 et que le joueur pariera sur le fait que la bille stoppe sur un nombre *pair* ou *impair* de telle sorte que s'il gagne, il reçoit le double de ce qu'il a misé. Ce joueur va jouer de la façon suivante : (*i*) il mise toujours sur *pair*, (*ii*) chaque fois qu'il perd, il rejoue en doublant la mise qu'il vient de perdre, (*iii*) il arrête de jouer s'il gagne ou s'il a perdu cinq fois de suite. Sa mise initiale est de un euro.
   (a) Donnez l'univers, la probabilité et la variable aléatoire qui permettent de décrire cette situation.
   (b) Quelle est la probabilité que le joueur ne gagne pas.
   (c) Prouvez que s'il gagne, le joueur gagnera toujours exactement un euro.
   (d) Calculez l'espérance de gain de ce joueur.
   (e) Quelle somme d'argent ce joueur doit-il avoir en poche en entrant dans le casino pour être certain de pouvoir appliquer sa stratégie quoi qu'il arrive ?
8. On considère le shéma $(\mathbf{B}, \mathbf{R})$ où $\mathbf{B} = \{\mathbf{0}\}$ et $\mathbf{R} = \{r_1, r_2\}$ avec
$$r_1 : n \to n + 2 \quad ; \quad r_2 : n \to n - 3.$$
   Déterminez l'ensemble engendré par ce shéma. Justifiez votre réponse.
9. Soit $E = \{0, 1\}^3$ et R_3 une relation binaire sur E définie par :
$$(a_1, b_1, c_1) R_3 (a_2, b_2, c_2) \text{ si et seulement si } a_1 \leq a_2 \text{ et } b_1 \leq b_2 \text{ et } c_1 \leq c_2.$$
   (a) Prouvez que R_3 est un ordre sur E et tracez le diagramme de Hasse de (E, R_3).
   (b) L'ensemble ordonné (E, R_3) possède-t-il un maximum ?
10. L'ensemble $\{(a, b) \in \mathbb{N}^2 \mid a - b = 0\}$ est-il dénombrable ? Justifiez votre réponse.
11. Soit $p \in S_3$, on note $\bar{p}$ la fonction définie par $\bar{p} = (12)p(12)$.
   (a) Prouvez que $\bar{p} \in S_3$ quel que soit $p \in S_3$.
   (b) Prouvez que $G_2 = \{\bar{p} \mid p \in S_3\}$ est un sous-groupe de S_3.
   (c) Prouvez que $\sigma : S_3 \to G_2$ est un isomorphisme de groupes.
   (d) Déterminez combien d'éléments se trouvent dans le quotient de S_3 par G_2.