Mathématiques Discrètes : Août 2010

Justifiez toutes vos réponses *(une réponse correcte non justifiée ne sera pas considérée).*
La qualité de la rédaction de vos arguments sera notée.

1. Décidez si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.
   (a) La formule suivante est une tautologie : $\forall a, b, c \in \mathbb{R} \ (a \neq 0) \Rightarrow (\exists x \in \mathbb{R} \ ax^2 + bx + c = 0)$.
   (b) La formule suivante est une tautologie : $\forall a, b \in \mathbb{Q} \ (a \neq 0) \Rightarrow (\exists x \in \mathbb{Q} \ ax + b = 0)$.
   (c) Quel que soit G groupe fini d'ordre $n \geq 1$, G possède un élément d'ordre n.
   (d) Quel que soit G groupe fini d'ordre $n \geq 1$, G **ne** possède **pas** d'élément d'ordre n.
   (e) La relation binaire $R \subseteq \mathbb{Z}^2$ définie par $R_1 = \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tel qu'il existe p premier où $p|a$ et $p|b\}$ est une relation d'équivalence.

2. On considère le schéma d'induction $(\mathbf{B}, \mathbf{R})$ où $\mathbf{B} = \{(0, 0)\}$ et $\mathbf{R} = \{r_1, r_2\}$ avec :

$$(a, b) \xrightarrow{r_1} (a + 2, b) \qquad ; \qquad (a, b) \xrightarrow{r_2} (a, b + 3)$$

   (a) Montrez comment le schéma $(\mathbf{B}, \mathbf{R})$ permet d'engendrer le couple $(4, 9)$.
   (b) Tout élément engendré par le schéma $(\mathbf{B}, \mathbf{R})$ appartient-il à $2\mathbb{N} \times 3\mathbb{N}$?
   (c) Tout élément de $2\mathbb{N} \times 3\mathbb{N}$ peut-il être engendré par le schéma $(\mathbf{B}, \mathbf{R})$?

3. Pour $n \in \mathbb{N}_0$, on définit $A_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$.
   (a) Représentez les ensembles A_1, A_2 et A_4.
   (b) Calculez $\bigcap_{n \geq 1} A_n$.
   (c) Est-il vrai que $\bigcup_{n \geq 1} A_n \subseteq \{z \in \mathbb{C} \text{ tq } |z| = 1\}$?
   (d) Est-il vrai que $\bigcup_{n \geq 1} A_n \supseteq \{z \in \mathbb{C} \text{ tq } |z| = 1\}$?

4. Soit S l'ensemble des fonctions de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$, i.e. $S = \{f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}\}$. Et $R_2 \subseteq S^2$ la relation binaire définie par :

$$(f, g) \in R_2 \quad \text{si et seulement si} \quad \{x \in \mathbb{Z} \mid f(x) \neq g(x)\} \text{ est fini.}$$

   (a) Donnez deux fonctions $f \neq g \in S$ telles que $(f, g) \in R_2$.
   (b) Prouvez que R_2 est une relation d'équivalence sur S.
   (c) Soit f_0 la fonction définie par $f_0(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{Z}$. On note $[f_0]$ la classe d'équivalence de f_0 pour R_2. Prouvez qu'il existe une fonction injective $F : \mathbb{Z} \to [f_0]$.

5. Soit $E_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ et S_n le groupe des permutations à n éléments, i.e. $S_n = \{p : E_n \to E_n \mid p \text{ est une bijection}\}$. On pose $G = \{p \in S_5 \mid \forall i \in E_5\, (i \geq 4) \Rightarrow (p(i) \geq 4)\}$.
   (a) Trouvez $p_1, p_2 \in S_5$ telles que $p_1 \in G$ et $p_2 \notin G$.
   (b) Prouvez que G est un sous-groupe de S_5.
   (c) Pour tout $p \in G$, pour tout $i \in E_3$, on pose $\bar{p}(i) = p(i)$.
      i. Prouvez que $\bar{p}(i) \in E_3$ quel que soit $p \in G$ et $i \in E_3$.
      ii. Prouvez que $\bar{p} : E_3 \to E_3$ est un élément de S_3.
   (d) Prouvez que $\sigma : G \to S_3$ défini par $\sigma(p) = \bar{p}$ est un morphisme de groupe.
   (e) Calculez $\mathrm{Ker}(\sigma)$, le noyau de σ.
   (f) A quel groupe connu le groupe $G/_{\mathrm{Ker}(\sigma)}$ est-il isomorphe ?

6. Dans la rue, Mister Proba vous propose de participer au jeu suivant pour la modique somme de dix euros. Votre objecti est de lancer deux dés dans le but que la somme des dés se rapproche au maximum de 9 sans dépasser cette valeur. Si vous obtenez exactement 9, Mister Proba vous rend vingt euros (i.e. vous gagnez dix euros). Si vous obtenez un total strictement supérieur à 9, Mister Proba ne vous rend rien (i.e. vous perdez dix euros). Si vous obtenez un total égal à n, avec $2 \leq n \leq 8$, Mister Proba vous rend n euros.
   (a) Sous l'hypothèse que les dés ne sont pas truqués, donnez l'univers Ω, la probabilité $\mathbb{P}$ et la variable aléatoire X qui permettent de décrire cette situation.
   (b) Déterminez si votre espérance de gain à ce jeu, i.e. l'espérance de la variable aléatoire X, est positive.

   Imaginons maintenant que vous avez lancé les deux dés et que vous avez obtenu un 3 et un 4 totalisant une somme de 7. Mister Proba vous propose de relancer l'un des deux dés contre un paiement de cinq euros supplémentaires.
   (c) Parmi les trois situations suivantes, laquelle est la plus intéressante (pour vous) : (i) Refuser l'offre de Mister Proba, (ii) Relancer le dé affichant 3, (iii) Relancer le dé affichant 4.
   (d) Les événements *"Obtenir une somme de* 9*"* et *"Obtenir une somme de* 9 *sachant que le premier dé affiche* 3*"* sont-ils indépendants ?