Mathématiques Discrètes : Janvier 2009

Justifier toutes vos réponses *(une réponse correcte non justifiée ne sera pas considérée).*
La qualité de la rédaction de vos arguments sera notée.

Décider si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

1. La terre est plate si et seulement si tous les nombres premiers sont impairs.
2. Quels que soient $a,\ b \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}_0$: $(a+b) \mod n \;=\; (a \mod n) + (b \mod n)$.
3. Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^n \neq 2^{n+1} - 1$.
4. Si pour tout $i \geq 2$ on pose $A_i = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1 - \frac{1}{i}\}$ alors $\bigcup_{i\geq 2} A_i =]0,1]$.
5. Le shéma $(\mathbf{B}, \mathbf{R})$ où $\mathbf{B} = \{\epsilon\}$ et $\mathbf{R} = \{r_1, r_2, r_3\}$ avec
$$r_1 : u \to aua \quad ; \quad r_2 : u \to bu \quad ; \quad r_3 : u \to ub,$$
engendre exactement les mots finis sur $\{a, b\}$ qui contiennent un nombre pair de a.
6. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, l'inégalité suivante est vérifiée $n^2 \leq (n+1)^2$.
7. La formule suivante est une tautologie : $\exists\, x \in \mathbb{N}\ \ \forall\, y \in \mathbb{N}\ (y \leq x) \ \Leftrightarrow\ \forall\, a \in \mathbb{N}\ \ \exists\, b \in \mathbb{N}\ (b < a)$.
8. Soient $p_1,\ p_2 \in \mathbb{N}$, si p_1 et p_2 sont premiers alors $\mathrm{pgcd}(p_1, p_2) = 1$.
9. Soit $p \in \mathbb{N}$, la fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par $f(n) = pn$ est injective[1] si et seulement si p est non nul.
10. Quel que soit $n \in \mathbb{N}$ la matrice M_n définie par $M_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n$ est inversible.
11. Soit $p \in \mathbb{N}$, si p est solution de l'équation $X^2 - 9X + 14 = 0$ alors p est un nombre premier.
12. Si pour tout $k \in \mathbb{N}$ on pose $A_k = \{x \in \mathbb{N} \mid k \leq x \leq k^2 + 2k + 1\}$ alors $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k = \mathbb{N}$.
13. Si φ_1 et φ_2 sont des tautologies, alors c'est aussi le cas de $\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2$.
14. Tout nombre naturel dont le carré est premier est un multiple de sept.
15. L'ensemble $\{X \subseteq \mathbb{N}$ tel que $|X| = 1\}$ est dénombrable.
16. Si $p \in \mathbb{N}$ vérifie l'équation $x^2 + 2 \equiv_5 1$ alors p est premier.
17. Le shéma $(\mathbf{B}, \mathbf{R})$ où $\mathbf{B} = \{\mathbf{ab}, \mathbf{ba}\}$ et $\mathbf{R} = \{r_1, r_2, r_3, r_4\}$ avec
$$r_1 : u \to abu \quad ; \quad r_2 : u \to bau \quad ; \quad r_3 : u \to uab, ; \quad r_4 : u \to uba,$$
engendre exactement les mots finis non vides de $\{a, b\}$ qui contiennent autant de a que de b.
18. Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, si $n \geq 1$ alors n est racine du polynôme $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$.
19. L'ensemble des parties de $2\mathbb{N} = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est dénombrable.
20. L'algorithme ci-dessous s'arrête si et seulement l'entrée n est un nombre pair.

```
Entrées : n ∈ ℕ
Initialisation : x := n et k := 1

Tant que ((x ≥ 0) ∧ (k² + 1 < 100)) faire
    Si (x² + 1 ≡₂ 1) alors k := 2k  et  x := x + 4
fin faire
```

[1] Rappel : Une fonction $f : A \to B$ est dite injective si $\forall\, a_1,\ a_2 \in A\ a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$.