# Mathématiques Discrètes : Janvier 2010

**Justifiez toutes vos réponses** *(une réponse correcte non justifiée ne sera pas considérée).*
**La qualité de la rédaction de vos arguments sera notée.**

1. Décidez si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.
   (a) Si $p$ est un nombre premier qui divise 2 et 3, alors $\int_1^p \frac{1}{1+x^p}\,\mathrm{d}x \leq 1$.
   (b) $\forall a \in \mathbb{Z}\ \exists x \in \mathbb{Z}\ x^2 - a = 0$.
   (c) $\forall a \in \mathbb{R}\ \exists x \in \mathbb{R}\ x^2 - a = 0$.
   (d) $\forall a \in \mathbb{Q}\ \forall b \in \mathbb{Q}\ \Big((a < b) \Rightarrow (\exists c \in \mathbb{Q}\ a < c < b)\Big)$.
   (e) Soit $p$ est premier, $a$, $b \in \mathbb{N}$, si $1 \leq a$, $b \leq p-1$, alors $ab \not\equiv_p 0$.
   (f) Soit $a$, $b$, $p \in \mathbb{N}$, si $1 \leq a$, $b \leq p-1$, alors $ab \not\equiv_p 0$.
   (g) Soit $a$, $p \in \mathbb{N}$, $a^2 \mod p = (a \mod p)^2$.

2. Dans cet exercice, $g$ est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Q}$, i.e. $g : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$. On dit que :

   | | | |
   |---|---|---|
   | $g$ est bornée | si et seulement si | $\exists b \in \mathbb{Q}\ \forall n \in \mathbb{N}\ g(n) \leq b$. |
   | $g$ est ultimement constante | si et seulement si | $\exists c \in \mathbb{Q}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\ \big((n \geq n_0) \Rightarrow (g(n) = c)\big)$. |
   | $g$ est poly-convergente vers 0 | si et seulement si | $\exists d \in \mathbb{N}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}_0\ \big((n \geq n_0) \Rightarrow g(n) \leq \frac{1}{n^d}\big)$. |

   Dans chacun des cas suivants, donnez (si possible) un exemple de fonction $g : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ telle que :
   (a) $g$ soit bornée sans être ultimement constante.
   (b) $g$ soit ultimement constante sans être bornée.
   (c) $g$ soit ultimement constante sans être poly-convergente vers 0.
   (d) $g$ soit poly-convergente vers 0 sans être ultimement constante.
   (e) $g$ soit poly-convergente vers 0 sans être bornée.

3. Pour $i \in \mathbb{N}_0$, on définit
$$A_i = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid \frac{-1}{i} \leq x \leq \frac{1}{i} \right\}$$
   Calculez $\bigcup_{i \geq 1} A_i$ et $\bigcap_{i \geq 1} A_i$.

4. On considère le schéma $(\mathbf{B}, \mathbf{R})$ où $\mathbf{B} = \{6, 35\}$ et $\mathbf{R} = \{r_1, r_2\}$ avec
$$r_1 : (n_1, n_2) \to n_1 + n_2 \quad ; \quad r_2 : (n_1, n_2) \to \mathrm{pgcd}(n_1, n_2).$$
   – Montrez que tout naturel est engendré par ce schéma.
   – Est-ce que $(\mathbf{B}, \mathbf{R})$ est un bon schéma ?

5. Trouvez l'ensemble des $x \in \mathbb{Z}$ qui vérifient l'équation suivante : $x^2 \equiv_4 x^2(x+1)$.

6. Prouvez que l'ensemble $\mathbb{N} \times \{0, 1, 2\} = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{N} \text{ et } y \in \{0, 1, 2\}\}$ est dénombrable.

7. On note $\mathbb{N}[x]$ l'ensemble des *polynômes à coefficients naturels*, i.e.

$$\mathbb{N}[x] = \{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \mid n \in \mathbb{N} \text{ et } a_i \in \mathbb{N}\}.$$

Soit $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ un polynôme à coefficients naturels, on définit le degré de $p(x)$, noté $\deg(p(x))$ comme suit :

$$\deg(p(x)) = \max\{i \in \mathbb{N} \mid a_i \neq 0\}.$$

Par exemple, $\deg(x^2 + 5) = 2$, $\deg(11) = 0$ et $\deg(0x^4 + x^3 + 7) = 3$.
On considère le schéma d'induction $(\mathbf{B}, \mathbf{R})$ où $\mathbf{B} = \{0\}$ et $\mathbf{R} = \{r_1, r_2\}$ avec :

$$p(x) \xrightarrow{r_1} p(x) + 1 \qquad ; \qquad p(x) \xrightarrow{r_2} x \cdot p(x)$$

(a) Montrez comment le schéma $(\mathbf{B}, \mathbf{R})$ permet d'engendrer le polynôme $2x^3 + x^2 + 3$.

(b) Prouvez que tout élément engendré par le schéma $(\mathbf{B}, \mathbf{R})$ est un polynôme à coefficients naturels.

(c) Soit $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ un polynôme à coefficients naturels. Prouvez (par induction sur $a_0$) que $p(x)$ peut être engendré par le schéma $(\mathbf{B}_p, \mathbf{R})$ où $\mathbf{B}_p = \{p(x) - a_0\}$.

(d) Soit $p(x) \in \mathbb{N}[x]$, prouvez (par induction sur $\deg(p(x))$) que $p(x)$ peut être engendré par le schéma $(\mathbf{B}, \mathbf{R})$.

8. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit

$$X_n = \{x \in \mathbb{R} \mid n \operatorname{mod} 2 \leq x \leq n \operatorname{mod} 4\} \quad ; \quad Y_n = \{x \in \mathbb{N} \mid (2|n) \Rightarrow (x \leq n)\}.$$

(a) Calculez $X_0$, $X_1$, $X_2$, $X_3$ et $X_{82}$.

(b) Calculez $\bigcup_{n \geq 0} X_n$.

(c) Calculez $\bigcup_{n \geq 0} Y_n$ et $\bigcap_{n \geq 0} Y_n$.