Mathématiques Discrètes : Janvier 2011

Justifiez **<u>toutes</u>** **vos réponses** *(une réponse correcte non justifiée ne sera pas considérée).*
La qualité de la rédaction de vos arguments sera notée.

1. Décidez si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

   (a) $\{b \in \mathbb{N} \mid \exists n \in \mathbb{N}\ \ b = (4^n \mod 7)\} = \{1, 2, 4\}$.

   (b) $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left[0, 2 + \frac{(-1)^n}{2^n}\right] = [0, 1]$.

   (c) L'ensemble $\{n \in \mathbb{N} \mid n$ est premier $\Rightarrow n$ est pair$\}$ est fini.

   (d) Soit $n \in \mathbb{N}$, soit $F_n = \big\{f : \{0, 1, \ldots, n\} \to \{0, 1\}\big\}$. Il existe une bijection $\varphi : \mathcal{P}(\{0, 1, \ldots, n\}) \to F_n$.

   (e) $\forall n \in \mathbb{Z}\ |n| \leq n^2$.

   (f) $\forall a, b, c \in \mathbb{Z}$, $\forall m \in \mathbb{N}_0$, on a $(a + b \equiv_m a + c) \Rightarrow (b \equiv_m c)$.

   (g) $\forall a, b, c, m \in \mathbb{N}_0$, tous premiers, on a $(a \cdot b \equiv_m a \cdot c) \Rightarrow (b \equiv_m c)$.

   (h) $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists n \in \mathbb{N}\ \ n \leq x \leq n + 1$.

   (i) Le schéma $(\mathbf{B}, \mathbf{R})$ permet d'engendrer tous les multiples de 3 ; où $\mathbf{B} = \{2, 3\}$ et $\mathbf{R} = \{r_1, r_2\}$ avec :

   $$x, y \xrightarrow{r_1} \text{pgcd}(x, y) \qquad ; \qquad x, y \xrightarrow{r_2} \text{ppcm}(x, y).$$

2. Un "truc" pour tester rapidement qu'un nombre naturel est divisible par 3 est de tester que la somme de ses digits dans son écriture en base 10 est divisible par 3. Par exemple, 123 est divisible par 3, car $1 + 2 + 3 = 6$ est divisible par 3. Le but de cet exercice est d'essayer de comprendre ce "truc".

   (a) Quel que soit $k \in \mathbb{N}$, calculez le reste de la division de 10^k par 3.

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$, on sait que l'on peut écrire n en base 10 (vous ne devez pas le prouver) ; c'est-à-dire que l'on peut écrire n sous la forme suivante :

   $$n = \sum_{k=0}^{K} a_k 10^k$$

   pour un certain $K \in \mathbb{N}$, avec $a_k \in \{0, 1, \ldots, 9\}$. Par exemple, $123 = 1.10^2 + 2.10^1 + 3.10^0$. En utilisant cette écriture, formalisez (à l'aide d'une implication) qu'une condition nécessaire pour qu'un nombre naturel soit divisible par 3 est que la somme de ses digits dans son écriture en base 10 soit divisible par 3.

   (c) En utilisant le point (a), prouvez la propriété que vous avez formulée au point (b).

   (d) Déterminez si la réciproque de la propriété que vous avez formulée au point (b) est vraie.

   (e) Ce "truc" est-il vrai pour tester la divisibilité d'un naturel par un autre nombre que 3 ? Expliquez votre raisonnement !

3. Soit $X \subseteq \mathbb{N}$, on note $|X|$ le nombre d'éléments de X. On considère le schéma d'induction (sur les parties de $\mathbb{N}$) $(\mathbf{B}, \mathbf{R})$ où $\mathbf{B} = \big\{\{0\}\big\}$ et $\mathbf{R} = \{r_1, r_2, r_3\}$ avec :

$$X \xrightarrow{r_1} X \cup \{|X|\} \qquad ; \qquad X \xrightarrow{r_2} X^c \qquad ; \qquad X, Y \xrightarrow{r_3} X \cap Y.$$

   (a) Le schéma $(\mathbf{B}, \mathbf{R})$ permet-il d'engendrer les ensembles $\{0, 1, \ldots, n\}$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$?

   (b) Le schéma $(\mathbf{B}, \mathbf{R})$ permet-il d'engendrer l'ensemble $\{1\}$?

   (c) Le schéma $(\mathbf{B}, \mathbf{R})$ permet-il d'engendrer les ensembles $\{n\}$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$?

   (d) Le schéma $(\mathbf{B}, \mathbf{R})$ permet-il d'engendrer toutes les parties **finies** de $\mathbb{N}$?

4. Trouvez (si possible) un exemple dans chacune des situations suivantes. Dans le cas où il est impossible de trouver un exemple, justifiez pourquoi.

   (a) Un ensemble $X \subseteq \mathbb{R}$ qui satisfait la formule suivante :

$$\big(\exists b \in \mathbb{R}\ \forall x \in X\ (x \leq b)\big) \ \wedge\ \big(\forall y \in X\ \exists z \in X\ (y < z)\big).$$

   (b) Une fonction $f : \{0, 1\} \to \{5, 7\}$ qui est injective sans être surjective.

   (c) Un ensemble *dénombrable* X de nombres réels tel que $X \subseteq [0, 1]$.

   (d) Un polynôme, avec (au moins) une racine non entière, qui est engendré par le schéma $(\mathbf{B}, \mathbf{R})$ où $\mathbf{B} = \{1, x\}$ et $\mathbf{R} = \{r_1, r_2\}$ avec :

$$p(x), q(x) \xrightarrow{r_1} p(x) + q(x) \qquad ; \qquad p(x), q(x) \xrightarrow{r_2} p(x) \cdot q(x).$$

   (e) Un polynôme, avec (au moins) une racine non entière, qui est engendré par le schéma $(\mathbf{B}, \mathbf{R})$ où $\mathbf{B} = \{1, x\}$ et $\mathbf{R} = \{r_1, r_2\}$ avec :

$$p(x) \xrightarrow{r_1} p(x) \cdot (x - 3) \qquad ; \qquad p(x), q(x) \xrightarrow{r_2} p(x) \cdot q(x).$$

   (f) Une fonction $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ qui est injective. ($\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \notin \mathbb{Q}\}$)

   (g) Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui satisfait la formule suivante :

$$\big(\forall x, y \in \mathbb{R}\ (x \leq y) \Rightarrow f(x) > f(y)\big) \wedge \big(\exists p \in \mathbb{R}_0\ \forall z \in \mathbb{R}\ f(z) = f(z + p)\big).$$

   (h) Une suite d'ensembles $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n \subseteq \mathbb{Q}$, qui satisfait la formule suivante :

$$\left(\forall k \in \mathbb{N} \bigcap_{n=0}^{k} X_n \neq \emptyset\right) \ \wedge\ \left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} X_n = \emptyset\right).$$

   (i) Une suite d'ensembles $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n \subseteq \mathbb{Q}$, qui satisfait la formule suivante :

$$\left(\forall k \in \mathbb{N} \bigcup_{n=0}^{k} X_n \neq \emptyset\right) \ \wedge\ \left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} X_n = \emptyset\right).$$