Mathématiques Discrètes : Juin 2008

Justifiez toutes vos réponses !
La qualité de la rédaction de vos arguments sera notée.

1. Décider si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifiez votre réponse.
   (Une réponse correcte non justifiée ne sera pas considérée)
   (a) Soit A un ensemble et $P(x)$ un prédicat de domaine A, la formule suivante est une tautologie :
   $$\forall x\ P(x) \ \Rightarrow\ \exists x\ P(x).$$
   (b) En posant $A_n = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq \frac{1}{n}\}$ (pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$), l'égalité suivante est vérifiée :
   $$\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n = \emptyset.$$
   (c) Soient $x,\ y \in \mathbb{Z}$, si $x \neq 0 \neq y$ alors $x.y \not\equiv_6 0$.
   (d) Soit p un nombre premier, le nombre $p^2 - p$ n'est jamais premier.

2. Prouver l'égalité suivante par induction (sur $n \in \mathbb{N}$) :
   $$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) x^k y^{n-k}.$$

3. Soit A un ensemble et $R \subseteq A^2$ une relation binaire sur A. On dit que R est *irréflexive* si et seulement si pour tout élément $a \in A$, a n'est pas en relation avec lui même.
   (a) Donner un exemple de relation irréflexive sur $\mathbb{Z}$.
   (b) Toute relation non réflexive est-elle irréflexive ? Justifier.
   (c) Si R est irréflexive R^{-1} est-elle irréflexive ? Justifier.
   (d) Si R est irréflexive R^n est-elle irréflexive quel que soit $n \geq 1$? Justifier.

4. Représenter le diagramme de Hasse d'un ensemble ordonné fini qui possède un minimum mais pas de maximum et qui possède trois éléments $a_1,\ a_2,\ a_3$ tels que $\sup\{a_1, a_2, a_3\}$ n'existe pas. Un tel ensemble peut-il être un treillis ?

5. Soit $C = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}\}$ et R la relation binaire définie par :
   $$R = \{(f, g) \in C \times C \mid \forall x \in \mathbb{R}\ f(x) \leq g(x)\}.$$
   (a) Donner deux fonctions $f,\ g \in C$ telles que $(f, g) \in R$.
   (b) Prouver que R est une relation d'ordre sur C.
   (c) R est-elle une relation d'ordre totale ?

6. On considère l'expérience aléatoire où une pièce de monnaie et un dés (à six faces) sont lancés en même temps. On appelle A l'événement *"La pièce tombe sur face"* et B l'événement *"Un nombre pair apparaît sur la face supérieure du dés"*.
   (a) Décrire l'univers Ω de cette expérience aléatoire ?
   (b) Déterminer la probabilité des événements suivants : A ; A et B ; A ou B ; A sachant B.
   (c) Déterminer si les événements A et B sont indépendants.

7. Soit S_3 l'ensemble des permutations de $\{1, 2, 3\}$ et R la relation binaire sur $(S_3)^2$ définie par :
   $$R = \{(p_1, p_2) \in S_3 \times S_3 \mid p_1(1) = p_2(1)\}.$$
   (a) Prouver que R est une relation d'équivalence.
   (b) Décrire la partition de S_3 induite par les classes déquivalence de R.
   (c) Déterminer si l'une des classes déquivalence de R est un sous-groupe de S_3.