Mathématiques Discrètes : Juin 2009

Justifiez toutes vos réponses !
La qualité de la rédaction de vos arguments sera notée.

1. Tracer le diagramme de Hasse de $(2^{\{2,3,5\}}, \subseteq)$.

2. Soit Ω l'univers (fini) d'une expérience aléatoire, $\mathbb{P}$ une mesure de probabilité sur Ω et $X \subseteq \Omega$. Prouver que $\mathbb{P}(X^c) = 1 - \mathbb{P}(X)$.

3. Soit G le sous-ensemble de matrices suivant :
$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$$
   (a) Prouver que G muni de la multiplication matricielle est un groupe.
   (b) Le groupe G (muni de la multiplication matricielle) est-il commutatif ?
   (c) Trouver un isomorphisme entre G muni de la multiplication matricielle et le groupe $\langle \mathbb{R}, +, 0 \rangle$.

4. On considère la relation binaire $R_1 \subseteq \mathbb{Z}^2$ définie par $(a, b) \in R_1$ si et seulement si $a^2 = b^2$.
   (a) Prouver que R_1 est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$.
   (b) Calculer la classe déquivalence de 0 pour R_1.
   (c) Calculer la classe déquivalence de 2 pour R_1.
   (d) Calculer le quotient de $\mathbb{Z}$ par R_1.

5. Un joueur lance trois fois une pièce de monnaie. Il gagne cinq euros s'il obtient au moins deux fois *face*, un euro s'il n'obtient qu'une seule fois *face* et il perd dix euros s'il ne voit pas *face*. Calculer l'espérance de gain du joueur dans ce jeu (en précisant quel est l'univers, la fonction de probabilité et la variable aléatoire que vous considérez).

6. Soit $C = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}\}$ et R_2 la relation binaire définie par :
$$R_2 = \{(f, g) \in C \times C \mid \forall x \in \mathbb{Z} \ f(x) \leq g(x)\}.$$
   (a) Donner deux fonctions $f,\ g \in C$ telles que $(f, g) \in R_2$.
   (b) R_2 est-elle une relation d'ordre sur C ?

7. Prouver que si G est un groupe qui possède exactement 2 éléments, alors G a un élément d'ordre 2.

8. Déterminer si la relation binaire $R_3 \subseteq \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2$ définie ci-dessous est une relation d'ordre.
$$(a_1, b_1) R_3 (a_2, b_2) \quad \text{si et seulement si} \quad (a_1 \leq a_2) \text{ ou } (b_1 \leq b_2).$$

9. Décider si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifiez votre réponse.
(Une réponse correcte non justifiée ne sera pas considérée)
   (a) Soit A un ensemble, un pré-ordre sur A est une relation binaire réflexive et transitive. Tout pré-ordre sur A est aussi un ordre sur A.
   (b) Le groupe $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ muni de l'addition définie composante par composante[1] est isomorphe à S_3, le groupe des permutations à trois éléments.
   (c) Soit Ω l'univers (fini) d'une expérience aléatoire, $\mathbb{P}$ une mesure de probabilité sur Ω et $X \subseteq \Omega$. Si $\mathbb{P}(X) = 1$ alors $X = \Omega$.
   (d) Pour tout $n \geq 2$, si G est un groupe à n éléments, alors G a un élément d'ordre n.

[1] i.e. $(a, b) + (c, d) = (a +_2 c, b +_3 d)$