Mathématiques Discrètes : Juin 2010

Justifiez toutes vos réponses *(une réponse correcte non justifiée ne sera pas considérée).*
La qualité de la rédaction de vos arguments sera notée.

1. Si $X \neq \emptyset$ est un ensemble fini, on note 2^X l'ensemble des parties de X. Etant donné $A \in 2^X$, on note $|A|$ le nombre d'éléments de A. Soit $R_X \subseteq 2^X \times 2^X$ la relation binaire définie par :

$$(A, B) \in R_X \text{ si et seulement si } |A| \leq |B|, \quad \text{où } A, B \in 2^X.$$

   Décidez si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

   (a) Quel que soit $X \neq \emptyset$ ensemble fini, la relation R_X est une relation d'ordre.

   (b) Quel que soit $X \neq \emptyset$ ensemble fini, la relation R_X **n**'est **pas** une relation d'ordre.

   (c) Quel que soit $X \neq \emptyset$ ensemble fini, la relation R_X **n**'est **pas** une relation d'équivalence.

2. Soit $\langle G_1, \cdot, 1\rangle$, $\langle G_2, +, 0\rangle$ deux groupes et $\varphi : G_1 \to G_2$ un morphisme de groupe. Prouvez que pour tout $n \in \mathbb{N}_0$ et pour tout $g \in G_1$, on a $\varphi(g^n) = n\,\varphi(g)$.

3. Soit $2^{\mathbb{Z}}$ l'ensemble des parties de $\mathbb{Z}$ et R_1 la relation binaire définie par :

$$R_1 = \{(X, Y) \in 2^{\mathbb{Z}} \times 2^{\mathbb{Z}} \mid \text{ il existe } f : X \to Y \text{ injective}\}.$$

   (a) Soit $X_1 = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \equiv_3 1\}$, trouvez $Y_1 \in 2^{\mathbb{Z}}$ tel que $Y_1 \neq X_1$ et $(Y_1, X_1) \in R_1$.

   (b) Soit $X_2 = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \equiv_5 2\}$, trouvez $Y_2 \in 2^{\mathbb{Z}}$ tel que $Y_2 \neq X_2$ et $(X_2, Y_2) \in R_1$.

   (c) La relation R_1 est-elle (i) réflexive ? (ii) transitive ? (iii) symétrique ? (iv) anti-symétrique ?

4. Un homme se trouve dans un bar, et toutes les cinq minutes, il se demande s'il va commander une autre bière ou s'il va rentrer chez lui (étudier son cours de mathématiques discrètes). A chaque fois qu'il se pose la question, il prend la décision de reprendre une bière avec probabilité $\frac{2}{3}$ et il rentre donc chez lui avec probabilité $\frac{1}{3}$.

   (a) Donnez l'univers qui permet de décrire cette situation.

   (b) Quelle est la probabilité que ce brave homme rentre chez lui après 15 minutes ?

   (c) Quelle est la probabilité que ce brave homme ne rentre jamais chez lui ?

   (d) Donnez la mesure de probabilité associée à cette situation et prouvez qu'il s'agit bien d'une mesure de probabilité.

5. Soit l'ensemble $E = \{0, 1, 2\}$, on munit E^2 de la relation binaire R_2 définie par :

$$R_2 = \left\{ \big((a_1, b_1), (a_2, b_2)\big) \in E^2 \times E^2 \mid a_1 \leq a_2 \text{ et } b_1 \leq b_2 \right\}.$$

   (a) Prouvez que la relation R_2 est une relation d'ordre sur E^2.

   (b) Tracez le diagramme de Hasse de (E^2, R_2).

6. Soit $E_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ et S_n le groupe des permutations à n éléments, i.e. $S_n = \{p : E_n \to E_n \mid p \text{ est une bijection}\}$. On pose $G = \{p \in S_6 \mid \forall i \in E_6\, (i < 4) \Rightarrow (p(i) = i)\}$.
   (a) Trouvez p_1, $p_2 \in S_6$ telles que $p_1 \in G$ et $p_2 \notin G$.
   (b) Prouvez que G est un sous-groupe de S_6.
   (c) Soit $p \in G$, prouvez que si $i \geq 4$, alors $p(i) \geq 4$.
   (d) Pour tout $p \in G$, pour tout $i \in E_3$, on pose $\bar{p}(i) = p(i+3) - 3$.
      i. Prouvez que $\bar{p}(i) \in E_3$ quel que soit $p \in G$ et $i \in E_3$.
      ii. Prouvez que $\bar{p} : E_3 \to E_3$ est un élément de S_3.
   (e) Prouvez que $\sigma : G \to S_3$ défini par $\sigma(p) = \bar{p}$ est un morphisme de groupe.
   (f) Calculez $\mathrm{Ker}(\sigma)$, le noyau de σ.
   (g) A quel groupe connu le groupe G est-il isomorphe ?

7. On tire **successivement** deux cartes dans un jeu de cartes complet (la première carte **n**'est **pas** remise dans le tas avant de tirer la seconde). Soient A l'événement *"la première carte tirée est une figure (valet, dame ou roi) rouge"* et B l'événement *"la deuxième carte tirée est une carte noire"*. Ces deux événements sont-ils indépendants ?

8. Soit $F = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$. Pour tout $f, g \in F$, on définit la relation binaire $\sim$ sur F de la façon suivante :
$$f \sim g \quad \Leftrightarrow \quad \exists A \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R} \quad (|x| > A \Rightarrow f(x) = g(x))\,.$$
   (a) Donnez deux fonctions $f, g \in F$ telles que $f \neq g$ et $f \sim g$.
   (b) La relation $\sim$ est-elle une relation d'équivalence sur F ?